

ӘЛ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ: 69.04:531.01

Қолжазба құқығында

МӘДІБАЙҰЛЫ ЖҰМАБАЙ

Механикалық жүйе ақауларының идентификациясы
6D060300 - Механика

философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:
ф.-м.ғ. докторы, профессор Кангужин Б.Е

Шетелдік ғылыми кеңесші:
Dr. Sergey Tikhonov (Icrea CRM, Spain, Barcelona)

Қазақстан Республикасы

Алматы, 2020 г.

МАЗМҰНЫ

Қысқартулар мен белгілеулер	3
Кіріспе	4
Есептің қойылымы мен мақсаттары	4
1 ЖІҢШКЕ СЫРЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ӘДІСТЕР	8
1.1 Жіңішке майысқан сырықтың моделі	8
1.2 Серпімділік теориясының сызықты есебі	9
1.3 Жіңішке әлсіз майысқан сырықтың шешімінің асимптотикасы	11
1.4 Шекті теңдеулер жүйесі	15
1.5 Сырықтардың байланысу моделі	16
1.6 Серпімділік теориясының теңдеулері	17
1.7 Сырықтардың бірігуі кезіндегі шекті теңдеулер жүйесі.	18
2 БІРНЕШЕ СЫРЫҚТЫҢ БӨЛІКТЕРІНЕН ҚҰРАЛҒАН КОНСТРУКЦИЯНЫҢ БОЙЛЫҚ ТЕРБЕЛІСІ	20
2.1 Дифференциалдық операторлар үшін Лагранж формуласы және ағаштағы максимал оператордың өз-өзіне түйіндес тарылуы	20
2.2 Ағашта максимал оператордың анықталуы	21
2.3 Формула Ағашта анықталған дифференциалдық операторлар үшін Лагранж формуласы	22
2.4 Λ_{\max} максимал оператордың өз-өзіне түйіндес тарылуы	27
2.5 Λ_{\max} максимал оператордың қисынды тарылуы	31
2.6 Белгіленген қисынды тарылу үшін Грин функциясы	33
2.7 Қисынды тарылуларды сипаттау	31
3 ШЕКАРАЛЫҚ БЕКІТІЛҮДІ БІРМӘНДІ ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУДЕ МЕНШІКТІ ЖИІЛІКТІҢ МИНИМАЛДЫ САНЫН АНЫҚТАУ. ҚОСЫМША МЫСАЛДАР	37
3.1 Көпірдің критикалық жылдамдығы	37
3.2 Қисайған құбырдан сұйықтық аққан кездегі орнықтылық есебі	51
3.3 Қисайған құбырдың сұйықтық аққан кездегі меншікті жиілігін есептеу	55
3.4 Сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері арқылы құбыр ұштарының бекітілуін анықтау	58
3.5 Меншікті жиіліктердің минимал мөлшерін қолдана отырып құбырдың бекітілуін идентификациялау	68
ҚОРЫТЫНДЫ	75
ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ	76
ҚОСЫМШАЛАР	81

Белгілеулер

u – сырықтың ауытқуы

ω – тербеліс жиілігі

E – серпімділік модулі

ε – деформация,

σ – кернеу

t – уақыт

l – сырықтың ұзындығы

J – инерция моменті

ρ – ауаның тығыздығы

V – желдің жылдамдығы

V^c – желдің критикалық жылдамдығы

U – сұйықтың жылдамдығы

$C(\alpha)$ – аэродинамикалық эксперименттерден алынған коэффициент

$m\ddot{y}$ – инерциялық күш

$r\dot{y}$ – демпфер күші

Ky – Серпімділік күші

m – құбырдың массасы

M – сұйықтың массасы

r – құбырдың сыртқы радиусы

r_1 – ішкі радиус

ρ_0 – сұйықтық тығыздығы

p_0 – құбырдың критикалық қысымы

Кіріспе

Диссертацияның тақырыбы сырықтар, құбырлар мен басқа да жұқа, сәл иілген құрылымдардың буын құрамына механикалық жүйелерді зерттеуге арналған. Берілген меншікті жиіліктер жиынтығы үшін көрсетілген механикалық жүйелердің шекаралық бекітулерін анықтау мәселелеріне басты назар аударылады. Мұндай проблемалар акустикалық диагностика мәселелерімен байланысты және теория тұрғысынан да, практикалық тұрғыдан да ғылыми қызығушылық тудырады.

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Жіңішке сырықтар мен олардың буындары барлық жерде кездеседі. Сырықтар теориясының теориялық негіздерін А.Клебш қалаған. Сырықтар теориясын одан әрі дамытуда көрнекті рөлді С.П.Тимошенко, А.И.Лурье, Г.Ю.Джанелидзе, С.Г.Лехницкий, Ю.Н.Работнов, т.б. атқарған. Техникалық теориялар инженерлік есептеулерде ежелден бері қолданылып келе жатқандығына қарамастан, жуықтау дәлдігімен қамтамасыз етілген олардың қолдану шарттары туралы, есептеу модельдерінің нақты объектілерге сәйкестігі туралы сұрақтар аз зерттелген.

Бұл диссертациялық жұмыста жіңішке сырықтардың әр түрлі бөліктерінен еркін аз тербелістерін зерттеуге бағытталған. Бұл жағдайда осындай құрылымдардың меншікті жиіліктерін және меншікті тербелістерін анықтау мәселесі алға шығады. Белгілі болғандай, меншікті жиіліктер зерттелетін құрылымның бастапқы геометриялық және физикалық сипаттамаларына ғана тәуелді емес. Оларға шекаралық бекітулер де, бірнеше сырықтар арасындағы байланыс түйіндеріндегі бекітулер де айтарлықтай әсер етеді. Осындай зерттеулер шеңберінде берілген типтегі модельдерді құру мәселесі де маңызды рөл атқарады. Жіңішке сырықтың немесе олардың алдын – ала берілген меншікті жиіліктер арқылы бөлшектенген мүшелеріне таңдау жасалынды. Меншікті жиіліктер жиынтығымен шекараны бекіту әдісін анықтау мәселесі акустикалық диагностика мәселелеріне жатады.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Әдетте, техникалық жөндеу орталықтарының мамандары автомобилдің қозғалтқышын ашпай-ақ, қозғалтқыштың дыбыстарынан жөндеуге қажетті бөлшегін анықтайды. Басқаша айтқанда, қозғалтқыштың ақауын құлағымен “естиді”. Мұндай мәселелер акустикалық диагностикаға жатады және әртүрлі техникалық салаларда жиі пайдаланылады.

Диссертацияда зерттелетін тақырып аталған акустикалық диагностикадағы есептермен тікелей байланысты, қарапайым жағдайда сырықтың меншікті жиіліктері арқылы сырықтың шеттері қалай бекітілгенін анықтау проблемасы туындайды. Бұл мәселе екі есепке бөлінеді. Алдымен сырықтың шеттерінің бекітілгенін бір мәнді табу үшін неше меншікті жиілік қажет? Меншікті жиіліктердің санын анықтағаннан кейін сырықтың шеттерінің бекітілуі әдісін құрастыру қажет. Сырықтың шеттері әр түрлі бекітілуі мүмкін: еркін тіреу, еркін үші, серпімді бекітілу, қатаң бекітілу. Әр түрлі бекітілу үшін қажетті меншікті жиіліктердің саны әр түрлі болуы мүмкін. Жалпы жағдайда

конструкцияның құрамында бірнеше сырық болуы мүмкін. Бір сырыққа қойылған есептер бұл жағдайда өзекті.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты. Бұл диссертациялық жұмыста жіңішке сырықтардың әр түрлі бөліктерінен құралған еркін аз тербелістерін зерттеледі. Бұл жағдайда осындай құрылымдардың меншікті жиіліктерін және меншікті тербелістерін анықтау маңызды. Белгілі болғандай, меншікті жиіліктер зерттелетін құрылымның бастапқы геометриялық және физикалық сипаттамаларына ғана тәуелді емес. Шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минималды саны анықталынды. Қосымша мысал келтіріледі. Аталған мақсатқа жету үшін диссертациялық жұмыста келесі зерттеу міндеттері қойылады.

Зерттеу міндеттері:

1. Жіңішке сырықтың (жіңішке сырықтармен өзара байланысқан конструкция) иілу, көлденең, бұралмалы тербелістерін сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер алу;

2. Жіңішке сырықтың (жіңішке сырықтармен өзара байланысқан конструкция) еркін аз тербелісінің меншікті жиілігін анықтау алгоритмі жасау;

3. Ақырлы меншікті жиіліктер жиынтығы бойынша жіңішке сырықтың шекаралық бекітілуін конструктивті қалпына келтіру алгоритмін құру.

Зерттеу нысаны - жіңішке сырықтар, түйінге байланған бірнеше сырықтар, көпірлер, иілген құбыр

Зерттеу пәні болып сырықтар теориясы, техникалық диагностика, серпімділік теориясы, теориялық механика, техникалық механика, графтар теориясы саналады. Зерттеулер деформацияланатын қатты дене және тұтас орта механикасындағы байқалатын деректерге негізделген көзқарастарға сәйкес жүргізіледі.

Зерттеу әдістеріне Клебштің жіңішке сырықтар теориясы, Корн бағалауы, Дирихле шарты, Кирхгоф шарттары, Тимошенконың белгілі иілу және көлденең тербеліс теңдеулері, Ильгамовтың кері есептері, сырықтардан құралған граф үшін статиканың кері есебі енеді.

Зерттеу нәтижесінің теориялық және практикалық маңыздылығы: сырықтар иілуінің серпімділік теориясындағы үш өлшемді теңдеулерді бір өлшемді модельдерге келтіру, сырықтардың бойлық тербелісіндегі шекті графтың доғаларында екінші ретті дифференциалдық теңдеулер беріледі. Тимошенко, Ляв теориялары кеңейтілді. шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде, меншікті жиіліктің минималды саны анықталынады. Қосымша мысал келтіріледі. Көпірдің бүйір бетіне соғатын желдің критикалық жылдамдығына әсер ететін шамалар анықталды. Қисайған құбырдың ішкі қысымы табылады және меншікті жиіліктерін табу алгоритмі ұсынылады.

Диссертациялық жұмыста келесі жаңа нәтижелер алынды:

1. Жіңішке сырықтың (жіңішке сырықтармен өзара байланысқан конструкция) иілу, көлденең, бұралмалы тербелістерін сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер алынды;

2.Жіңішке сырықтың (жіңішке сырықтармен өзара байланысқан конструкция) еркін аз тербелісінің меншікті жиілігін анықтау алгоритмі жасалынды.

3.Ақырлы меншікті жиіліктер жиынтығы бойынша жіңішке сырықтың шекаралық бекітілуін конструктивті қалпына келтіру алгоритмі құрылды.

Бірінші пункттегі жаңалық жіңішке сырықтың иілу және көлденең тербелістерінің дифференциалдық теңдеулер жүйесі өзара байланысты. Алынған нәтижелерден, кейбір болжамдарды үшін Тимошенконың белгілі иілу және көлденең тербелісінің теңдеулері тиімді екенін көреміз.

Үшінші пункттың жаңа аспектісі – шекаралық бекітілуді бірмәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минималды саны анықталынды. Қосымша мысал келтіріледі.

Зерттеу нысандары практикада жиі кездесетініне қарамастан, диссертацияның нәтижелері теориялық сипатқа ие болады.

Диссертация нәтижелерінің сенімділігі алынған нәтижелерді белгілі нәтижелермен салыстыру, сондай-ақ жақсы тексерілген математикалық әдістерді қолдану арқылы расталады. Басылымдардың сапасы күмән тудырмайды.

Тәжірибелік құндылығы практикада сырық құрылымдары маңызды, яғни ерікті түрде жалғанған біртекті емес, әлсіз майысқан анизотропты сырықтар. Жіңішке сырықтар есептерінде басты мақсат шекті теңдеулер жүйесін шекті графта қорытып шығару.

Жұмыстың апробациясы Диссертациялық жұмыстың негізгі ойлары мен нәтижелері келесі ғылыми конференциялар мен семинарларда баяндалған және талқыланған:

ғылыми конференциялар:

1.Сырықтың бойлық тербелісінің меншікті жиіліктері арқылы қима аудандарын қалпына келтіру//Қазақстан Республикасының ғылыми қызметкерлер күніне арналған дәстүрлі халықаралық ғылыми конференция. Алматы, Қазақстан, (06.04.2018-10.04.2018), 81-82 б.

2. Сырықтың иілу тербелістерінің жиіліктері арқылы шоғырланған массаларды қалпына келтіру туралы // «XIV-шы студенттер, магистранттар және жас ғалымдардың ЛОМОНОСОВ – 2018 халықаралық конференциясы», 20.05.2018-21.05.2018 Астана, Қазақстан, 79-79 бет.

3. Ағынды сұйықтығы бар қисық сызықты құбырдың бекітілуінің Идентификациясы.// XVII бүкіл ресейлік жастар конференция мектебі «Лобачевский оқулары – 2018», Казань, РФ, 23.11.2018-28.11.2018, 90-91бет.

4.Ағынды сұйықтығы бар құбырдың орнықтылығы// Халықаралықконференция, Математика, Механика, Қолданбалы мәселелер» Қарағанды, Қазақстан, 12.06.2019-13.06.2019,32-33 б.

Келесі семинарларда баяндамалар жасалынды:

Әл-фараби атындағы ҚазҰУ механика кафедрасының ғылыми семинарлары(Алматы, Қазақстан 2017-2020).

Ө.А.Джолдасбеков ат. механика және машинатану институтының ғылыми семинарлары(Алматы, Қазақстан 2017-2020).

Жарияланымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 10 жұмыс жарияланды, оның

ішінде: 1 мақала Scopus Eurasian Mathematical Journal, Q3, CiteScore – 37 – процентиль журналда және 1 Web of Science деректер базасына кіретін ғылыми журналында жарияланған; 3 ғылыми мақала ҚР БҒМ БҒСБК ұсынған журналдарда; 2 тезис шетелдік конференция материалдарында жарияланған; 3 тезис ҚР-да өткізілген халықаралық конференция материалдарының жинағында жарияланған.

Автордың жеке қосқан үлесі:

Жіңішке сырықтың иілу және көлденең тербелістерінің дифференциалдық теңдеулер жүйесі өзара байланысын табуға қатысты.

Шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минималды саны анықтауға қатысты.

Жіңішке сырықтар есептерінің шекті теңдеулер жүйесін шекті графта қорытып шығаруға қатысты.

Диссертацияның құрлымы мен көлемі.

Бірінші пункттегі жаңалық жіңішке сырықтың иілу және көлденең тербелістерінің дифференциалдық теңдеулер жүйесі өзара байланысты. Алынған нәтижелерден, кейбір болжамдарды үшін Тимошенконың белгілі иілу және көлденең тербелісінің теңдеулері тиімді екенін көреміз.

Үшінші пункттың жаңа аспектісі – шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минималды саны анықталынды. Қосымша мысал келтіріледі.

Зерттеу нысандары практикада жиі кездесетініне қарамастан, диссертацияның нәтижелері теориялық сипатқа ие болады.

1 ЖІҢІШКЕ СЫРЫҚТАР ТЕОРИЯСЫНДАҒЫ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ӘДІСТЕР

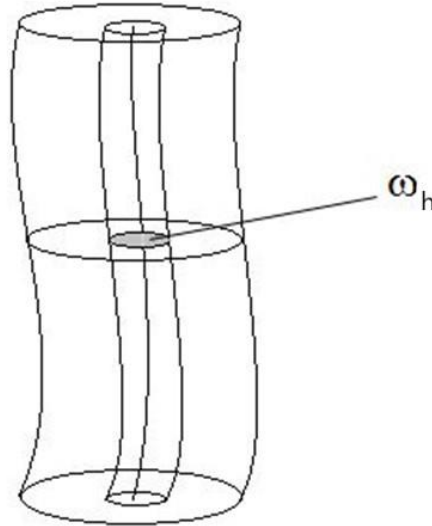
Сырықтар иілуінің техникалық теорияларында серпімділік теориясындағы үш өлшемді теңдеулер бір өлшемді модельдерге келтірілген. Бұл төмендету бірқатар физикалық болжамдарға негізделген [1,2]. Техникалық теориялар инженерлік есептеулерде сәтті қолданылады. Алайда бір өлшемді модельдердің нақты объектілерге сәйкестігі туралы мәселе әлі толық зерттелген жоқ. Серпімді сырық теорияларын асимптотикалық талдаудың көптеген әдістері бар. Әдістің тиімділігі көбінесе зерттеуші таңдаған шешімнің асимптотикалық құрылымына байланысты. Асимптотикалық құрылымды таңдау атап өтілген физикалық гипотезалармен бірдей рөл атқарады [3,4,5,6]. Сырықтың диаметрін кішірейтуінен алынған шешімнің әрекеті қалай болатыны туралы нақтырақ дерек керек болатын болса, онда тереңірек зерттеу жүргізу керек болады. Сонымен бірге, шамадан тыс шарттар, әдетте, оң жақтан талап етіледі. Төмендету жарамды болуы үшін оң жағында қандай жағдайлар жеткілікті (қажетке жақын)? Оң жақтағы ұқсас жағдайларды білу үшін бізге нақты шешімі мен асимптотикалық аңдаттың айырмасының Корн бағалауы қажет. Корнның бағалауы сырықтың диаметрі бойынша да, оң жақ бүйірлерінің дифференциалдық қасиеттері бойынша да дәлелденбейтінін алуға мүмкіндік береді [7,8,9].

1.1 Жіңішке майысқан сырықтың моделі

Алдағы уақытта горизонталь қимасының геометриялық сипаттамалары шексіз нөлге кемиді (яғни, қима нүтеге қарай созылды). Бұндай жағдайларды сипаттау үшін h кіші параметрі енгізілді. Қиманың h рет сығылуын қарастыру ыңғайлы, яғни

$$\omega_h(z) = \left\{ (y_1, y_2, z) : \left(\frac{y_1 - P_1(z)}{h}, \frac{y_2 - P_2(z)}{h} \right) \in \omega(z) \right\}.$$

Егер $h \rightarrow +0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_h(z) = \{(P_1(z), P_2(z), z)\}$. Осылайша, жіңішке сырық өзінің осіне ұмытылғандағы жағдайдың моделі пайда болады.



Сурет 1. $h \rightarrow +0$ кезінде сырықтың кішірейюі көрсетілген

1.2. Серпімділік теориясының сызықты есебі

Жіңішке майысқан серпімді сырық берілді деп есептейміз. Орын ауыстыру векторы

$$u = \begin{pmatrix} u_1(y_1, y_2, z) \\ u_2(y_1, y_2, z) \\ u_3(y_1, y_2, z) \end{pmatrix},$$

болсын. Мұнда,

$u_1 - Oy_1$ ось бағытында ауытқуы,

$u_2 - Oy_2$ ось бағытында ауытқуы,

$u_3 - Oy_3$ ось бағытында ауытқуы.

Стандартты түрде деформация бағанын және кернеу бағанын енгіземіз.

$$\varepsilon(u) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \frac{1}{a} \varepsilon_{32} \\ \frac{1}{a} \varepsilon_{31} \\ \frac{1}{a} \varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \sigma(u) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}.$$

Мұнда $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ сәйкесінше y_1, y_2, z остеріне қарай ұзаруы. Сондай-ақ, z және y_2 остері бағытына сәйкес ε_{32} – орын ауыстыру бұрышы. ε_{31} и ε_{12} дәл осылай деформациялары осылай жүргізіледі.

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ [10] теринологияға сәйкес y_1, y_2, z остерінің перпендикуляр қимасының нормаль кернеуі болып табылады. y_1 бағытындағы $z = const$ қимасына әсер етуші жанама кернеу ε_{32} . σ_{31} және σ_{12} үшін де жанама кернеулер орынды. Гук заңы бойынша

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u),$$

мұндағы

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

A – материалдың серпімді модульдерінен құралған, симметриялы оң анықталған 6×6 өлшемді матрица функция

Мұнда ыңғайлылық үшін $\sqrt{2}\alpha = 1$ таңдап алынды.

Алдағы мақсаттар үшін матрицаны енгізу ыңғайлы

$$D(\vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \\ 0 & \alpha\xi_3 & \alpha\xi_2 \\ \alpha\xi_3 & 0 & \alpha\xi_1 \\ \alpha\xi_2 & \alpha\xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сонымен қатар градиент

$$\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right),$$

мұндағы $x = (y_1, y_2, z)$.

Онда серпімділік теориясының тендеулері матрицалық түрде мынадай [11,12]

$$L(h, x, \nabla_x)u(h, x) := D(-\nabla_x)^t A(h, x) D(\nabla_x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in S(h), \quad (1.1)$$

$$B(h, x, \nabla_x)u(h, x) := D(v(h, x))^t A(h, x) D(\nabla_x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \gamma(h), \quad (1.2)$$

$$u(h, x) = 0, \quad x \in \omega(h) \left(\pm \frac{l}{2} \right), \quad (1.3)$$

(1.1) теңдеулерінде, $s(h)$ сырыққа ауқымды күш $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ әсер ететіні ескерілген. $s(h)$ сырықтың $\gamma(h)$ бүйір бетіне $g = (g_1, g_2, g_3)^T$ күш түсірілген.

(1.3) шарты орындалғандықтан, $s(h)$ сырықтың ұштары $\omega_h\left(\pm \frac{l}{2}\right)$ қатаң бекітілген.

(1.2) қатынасында $s(h)$ сырықтың бүйір бетіне қарай сыртқы бірлік нормальдар $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$ бар екенін атап өтеміз.

$$\nu(h, x) = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2 \nu_0^2}} (\nu_1(\eta, z); \nu_2(\eta, z); h \nu_0(\eta, z))^T, \quad (1.4)$$

Мұнда $\eta \in \omega(z)$ тиісті баяу айнымалылар. Басқаша айтқанда,

$$\eta = (\eta_1, \eta_2), \quad \eta_1 = \frac{y_1}{h}, \quad \eta_2 = \frac{y_2}{h}, \quad (y_1, y_2) \in \omega_h(z),$$

$(\nu_1(\eta, z); \nu_2(\eta, z); h \nu_0(\eta, z))$ векторы – $\partial \omega(z)$ шекарасындағы сыртқы нормальдар. ν_0 шамасы – қиманың өзгермелілігін сипаттайды.

1.3 Жіңішке әлсіз майысқан сырықтың шешімінің асимптотикасы

Алдыңғы пункте сырыққа ауқымды күш $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ пен бүйір бетінен әсер ететін күштер $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ ескерілгенін айттық.

$$\int_{\omega(z)} F_i(\eta, z) d\eta + \int_{\partial \omega(z)} g_i(\eta, z) dS_\eta = 0, \quad i = 1, 2.$$

шарттарына бағынатын көлемдік және беттік күштер болсын. Сондай-ақ бізге тек $z \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ тәуелді $\vec{T}(z) = (T_1(z), T_2(z), 0)$, көлемдік күштер қажет болады. (1.1) теңдеуінің оң жағы мынадай түрде болсын деп есептейміз

$$\vec{f}(h, x) = \frac{1}{h} \cdot \vec{F}(\eta, z) + \vec{T}(z) + \tilde{f}(h, x).$$

(1.2) қатынасының оң жағы

$$\vec{g}(h, x) = \vec{g}(\eta, z) + \tilde{g}(h, x).$$

Сондай-ақ $\vec{F}, \vec{T}, \tilde{f}, \vec{g}, \tilde{g}$ функцияларын ақырсыз дифференциалданады деп есептейміз. \vec{F}, \vec{g} функцияларының механикалық интерпретациялары [13] монографияда берілген.

$x \rightarrow (\eta, z)$ координаттарын ауыстыру арқылы h параметріне айқын тәуелділігін бөліп аламыз.

$$D(\nabla_x) = \frac{1}{h} D_\eta + D_z,$$

мұндағы $D_\eta = D(\nabla_\eta, 0)$, $\nabla_\eta = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_1}, \frac{\partial}{\partial \eta_2} \right)^T$, $D_z = D(0, 0, \partial_z)$. Сондықтан

$$\bar{n}^{\frac{1}{2}} D(v) = D_v + h D_0, \quad D_v = D(v_1, v_2, 0), \quad D_0 = D(0, 0, v_0)$$

Алдағы уақытта $A(h, \eta, z)$ матрицасын $A(0, \eta, z)$ матрицасына ауыстырамыз, оны $A(\eta, z)$ деп белгілейміз. (1.1) және (1.2) қатынастарына кіретін операторлар мынадай түрде болады

$$L(h, x, \nabla_x) = \frac{1}{h^2} L^0(\eta, z, \nabla_\eta) + \frac{1}{h} L^1(\eta, z, \nabla_\eta, \partial_z) + L^2(\eta, z, \partial_z),$$

$$\sqrt{n(h, x)} \cdot B(h, x, \nabla_x) = \frac{1}{h} B^0(\eta, z, \nabla_\eta) + B^1(\eta, z, \nabla_\eta, \partial_z) + h B^2(\eta, z, \partial_z),$$

мұндағы $L^0 = -D_\eta^T A D_\eta$, $L^1 = -D_\eta^T A D_z - D_z^T A D_\eta$, $L^2 = -D_z^T A D_z$, $B^0 = -D_v^T A D_\eta$,

$$B^1 = D_v^T A D_z + D_0^T A D_\eta, \quad B^2 = D_0^T A D_z.$$

Алдағы уақытта e_1, e_2, e_3 арқылы y_1, y_2 және z осьтердің бірлік векторларын белгілейміз. [14] жұмыс нәтижелері бойынша біз асимптотикалық анцаттын бастапқы мүшелерін мынадай түрде таңдаймыз

$$\frac{1}{h^2} \{e_1 w_1(z) + e_2 w_2(z)\} + \frac{1}{h} \{e_3 (w_3(z) - \eta_1 \partial_z w_1(z) - \eta_2 \partial_z w_2(z)) + \alpha(\eta_1 e_1 - \eta_2 e_1) w_4(z)\}$$

Мұндағы w_1, w_2, w_3 және w_4 - анықталуы тиіс функциялар. Олардың механикалық мағынасы сырықтағы көлденең және бойлық орын ауыстырулар және оның бұралуы. w_1, w_2, w_3, w_4 кезінде h дәрежелер көрсеткіштерінің арасындағы сәйкессіздік механикалық интерпретацияға ие, өйткені сырық созылу немесе бұралудан гөрі иілуі оңай.

$$U^{-2}(z) = e_1 w_1(z) + e_2 w_2(z),$$

$$U^{-1}(\eta, z) = e_3 (w_3(z) - \eta_1 \partial_z w_1(z) - \eta_2 \partial_z w_2(z)) + \alpha(\eta_1 e_1 - \eta_2 e_1) w_4(z)$$

арқылы белгілейміз

(1.1), (1.2) және (1.3) есептерінің шешімі мынадай түрде

$$u(h, x) = \frac{1}{h^2} U^{-2}(z) + \frac{1}{h} U^{-1}(\eta, z) + U^0(\eta, z) + h U^1(\eta, z) + \dots$$

Теңдеулер жүйесін аламыз

$$L^0 U^k = \Phi^k := -L^1 U^{k-1} - L^2 U^{k-2} + \delta_{k,1} \bar{F} + \delta_{k,2} \bar{T}(z) \quad w(z) \quad (1.5)$$

$$B^0 U^k = \Psi^k := -B^1 U^{k-1} - B^2 U^{k-2} + \delta_{k,1} \bar{g} \quad \partial w(z). \quad (1.6)$$

мұнда $p < -2$ кезінде $k = -2, -1, 0, 2$ және $U^p \equiv 0$. Сондай-ақ мұнда δ_{ij} Кронекер символ қолданылатынын ескереміз. Егер $k = -2$ болса, онда (1.5) қатынасының оң жақ бөлігі, (1.6) нөлге тең. Бұдан шығатыны, $U^{-2}(z) = e_1 w_1(z) + e_2 w_2(z)$ өрнегінен мына теңдік

$$\begin{aligned} L^0 e_1 w_1(z) + L^0 e_2 w_2(z) &= 0 \quad \text{в } w(z) \\ B^0 e_1 w_1(z) + B^0 e_2 w_2(z) &= 0 \quad \text{в } \partial w(z) \end{aligned}$$

Егер $k = -1$ болса, онда жүйені аламыз

$$\begin{aligned} -D_\eta^T A D_\eta U^{-1} &= D_\eta^T A D_z U^{-2} \quad \text{в } w(z) \\ D_\nu^T A D_\eta U^{-1} &= -D_\nu^T A D_z U^{-2} \quad \text{в } \partial w(z) \end{aligned}$$

Қарапайым түрлендірулер арқылы мына формуланың орынды екенін көреміз

$$D_z U^{-1}(\eta, z) = Y(\eta) D(\partial z) w(z),$$

мұнда $w(z) = (w_1(z), w_2(z), w_3(z), w_4(z))^T$, $D(\partial z) = \text{diag}(\partial_z^2, \partial_z^2, \partial_z, \partial_z)$,

$$Y(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 \eta_2 & \alpha^2 \eta_1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Егер $k = 0$, онда жүйені аламыз

$$\begin{aligned} L^0 U^0 &= D_\eta^T A D_z U^{-1} + D_z^T A \{D_\eta U^{-1} + D_z U^{-2}\} \quad \text{в } w(z) \\ B^0 U^0 &= -D_\nu^T A D_z U^{-1} - D_\nu^T A \{D_\eta U^{-1} + D_z U^{-2}\} \quad \text{в } \partial w(z) \end{aligned}$$

Мына есептің шешімі болатын 3×4 өлшемді X матрицасын енгіземіз

$$\begin{aligned} -D_{\eta}^T A D_{\eta} X &= D_{\eta}^T A Y \text{ в } w(z) \\ D_{\nu}^T A D_{\eta} X &= -D_{\nu}^T A Y \text{ на } \partial w(z) \end{aligned}$$

Онда мынадай түрде беріледі

$$U^0(\eta, z) = X(\eta, z) D(\partial z) w(z)$$

$k=1$ кезінде (1.5), (1.6) есептерінің шешімділігі үшін w вектор-функциясы қатынастарды қанағаттандыру керек

$$\begin{aligned} -\partial_z \int_{w(z)} (D(e_3) e_3)^T A(\eta, z) (D_{\eta} X(\eta, z) + Y(\eta)) d\eta D(\partial z) w(z) &= P_3(z), \\ -\partial_z \int_{w(z)} (D(e_3) \theta(\eta))^T A(\eta, z) (D_{\eta} X(\eta, z) + Y(\eta)) d\eta D(\partial z) w(z) &= P_4(z), \end{aligned}$$

мұнда $P_3(z) = \langle \bar{F}(\cdot, z), e_3 \rangle_{w(z)} + \langle \bar{g}(\cdot, z), e_3 \rangle_{\partial w(z)}$,

$$P_4(z) = \langle \bar{F}(\cdot, z), \theta \rangle_{w(z)} + \langle \bar{g}(\cdot, z), \theta \rangle_{\partial w(z)}$$

$k \geq 2$ кезінде (1.5), (1.6) есептерінің шешімділігі үшін w вектор-функциясы қатынастарды қанағаттандыру керек

$$-(e_3)^T \partial_z D_z^T \int_{w(z)} \eta_i A(\eta, z) \{D_{\eta} X(\eta, z) + Y(\eta)\} d\eta D(\partial_z) w(z) = P_i(z),$$

мұндағы $i=1,2$, $P_i(z) = T_i(z) \text{mes}_2 \{w(z)\} + \partial_z \{ \langle \eta_i, F_3(\eta, z) \rangle_{w(z)} + \langle \eta_i, g_3(\eta, z) \rangle_{\partial w(z)} \}$

Осылайша, $w(z)$ вектор-функциясы жоғарыда көрсетілген төрт шартты қанағаттандыру керек. Оларды келесі шекті тендеулер жүйесі арқылы жазу ыңғайлы болады

$$D(-\partial_z) M(z) D(\partial_z) w(z) = \bar{P}(z), \quad z \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right),$$

мұндағы $\bar{P}(z) = (P_1(z), P_2(z), P_3(z), P_4(z))$,

$$M(z) = \int_{w(z)} Y^T(\eta) A(\eta, z) (D_{\eta} X(\eta, z) + Y(\eta)) d\eta$$

Сондай-ақ $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right)$ интервал ұштарында шарттар орындалады

$$w_q\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0, \quad q = 1, 2, 3, 4,$$

$$\partial_z w_i\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

1.4 Шекті теңдеулер жүйесі

Бұл пункте $h \rightarrow 0$ кезінде (1.1), (1.2), (1.3) шығатын шекті теңдеулер келтірілген. Осылайша, серпімділік теориясының үшөлшемді есебі бір өлшемді есепке келтірілді.

Бұл пункте изотропты жіңішке майысқан сырық қарастырылады. λ және μ Ламе коэффициенттері болсын. Қатаңдық матрицасы мынадай түрде таңдап алынды

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Белгісіз $w_1(z)$ арқылы Oy_1 ось бағытында ауытқуын белгілейміз. Дәл солай $w_2(z)$ арқылы Oy_2 ось бағытында ауытқуы. $w_3(z)$ арқылы Oz ось бойымен бойлық созылу, ал $\alpha w_4(z)$ арқылы – осы осьтің айналасындағы бұралу бұрышы. Әрі қарай $\vec{F}_3(z)$ – бойлық күш, ал $-\alpha \vec{F}_4(z)$ – сырыққа қойылған айналмалы момент. $i = 1, 2$ кезінде кесу күштері $\vec{f}_i(z)|\omega(z)|$ мұнда $\omega(z)$ – қима ауданы. Иілу моменті $i = 1, 2$ кезінде біздің жағдайымызда:

$$\left\{ \langle \eta_i; f_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\omega(z)} + \langle \eta_i; g_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\partial\omega(z)} \right\}.$$

$i = 1, 2$ кезінде $\vec{F}_i = \vec{f}_i(z)|\omega(z)| + \frac{d}{dz} \left\{ \langle \eta_i; f_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\omega(z)} + \langle \eta_i; g_3^\perp(\eta, z) \rangle_{\partial\omega(z)} \right\}$ деп белгілейміз.

Сондай-ақ бізге келесі шамалар қажет: $d(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_1 d\eta_1 d\eta_2$, $l(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_2 d\eta_1 d\eta_2$,

$$\alpha(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_1^2 d\eta_1 d\eta_2, \quad b(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_1 \eta_2 d\eta_1 d\eta_2, \quad c(z) = \iint_{\omega(z)} \eta_2^2 d\eta_1 d\eta_2,$$

$h(z) = \iint_{\omega(z)} (\eta_1^2 + \eta_2^2) d\eta_1 d\eta_2$. Онда шекті теңдеулер жүйесі мынадай түрде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dz^2} \left(\mu(z) \left(\alpha(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} + b(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} - d(z) \frac{d^2 w_3(z)}{dz} \right) \right) = F_1(z), \\ \frac{d^2}{dz^2} \left(\mu(z) \left(b(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} + c(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} - l(z) \frac{d w_3(z)}{dz} \right) \right) = F_2(z), \\ -\frac{d}{dz} \left(\mu(z) \left(-d(z) \frac{d^2 w_1(z)}{dz^2} - l(z) \frac{d^2 w_2(z)}{dz^2} + \frac{d w_3(z)}{dz} \right) \right) = F_3(z), \\ -\frac{d}{dz} \left(\mu(z) \left(\alpha^4 h(z) \frac{d w_4(z)}{dz} \right) \right) = F_4(z), \end{array} \right. \quad (1.7)$$

$\left(-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}\right)$ интервалының ұштарында Дирихле шарттарымен толықтырылады

$$w_q \left(\pm \frac{l}{2} \right) = 0, \quad q = 1, 2, 3, 4, \quad \frac{d}{dz} w_1 \left(\pm \frac{l}{2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dz} w_2 \left(\pm \frac{l}{2} \right). \quad (1.8)$$

(1.7) шекті теңдеулер жүйесі бұрындары белгілі болғандардан, мыналарымен ерекшеленеді

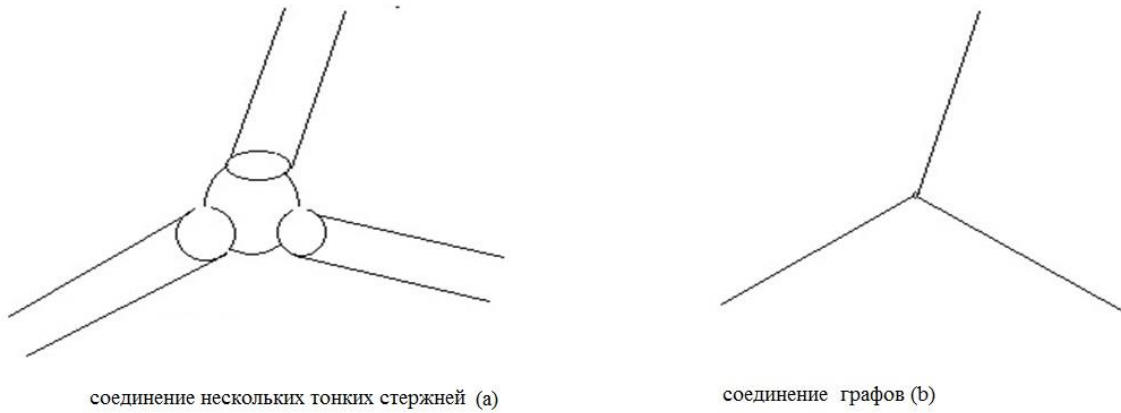
- (i) $w_1(z)$ ауытқуларына Oy_1 ось бағытында $w_2(z)$, $w_3(z)$ ауытқулары әсер етеді;
- (ii) $w_2(z)$ ауытқуларына Oy_2 ось бағытында $w_1(z)$, $w_3(z)$ ауытқулары әсер етеді;
- (iii) $w_3(z)$ бойлық ауытқуларына Oz ось бағытында $w_1(z)$, $w_2(z)$ ауытқулары әсері ескеріледі;

Осыған дейінгі белгілі жұмыстарда әдетте қозғалыстар қосымша физикалық болжамдар бойынша бөлінеді. (1.7) жүйесінен көрініп тұрғандай $w_1(z)$ және $w_2(z)$ ауытқулары төртінші ретті дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады, ал бойлық ауытқуы $w_3(z)$ екінші ретті дифференциалдық теңдеулерге қанағаттандырады. Бұрылу бұрышын табу процесі $w_4(z)$ ауытқуларға байланысты емес $w_1(z)$, $w_2(z)$ және $w_3(z)$ автономды түрде анықтауға болады. (1.7)-дегі дифференциалдық теңдеулер коэффициенттері $\omega(z)$ қимасының Oz осі бойымен өзгерісіне тәуелді екенін ескереміз. Бұрынғы ғылыми жұмыстарда бұл фактіге аз көңіл бөлінді.

1.5 Сырықтардың байланысу моделі

Бұл пункте бірнеше жіңішке сырықтардың бірігуін қарастырамыз. $\Omega(h)$ арқылы жіңішке сырықтардың $S_1(h)$, $S_2(h), \dots, S_N(h)$ бірігуін және $Q_1(h)$, $Q_2(h), \dots, Q_M(h)$ шағын түйіндерін белгілейміз. $h \rightarrow +0$ кезінде $\Omega(h)$ обласы G бір өлшемді жиынға кішірейетін конструкцияның қаңқасын атаймыз. $V = \{P_1, P_2, \dots, P_M\}$ қос нүктелерді біріктіретін G қаңқасы түзу сызықты

кесінділерден тұрады e_1, e_2, \dots, e_n . e_1, e_2, \dots, e_n доғаларынан және P_1, P_2, \dots, P_M төбелерінен тұратын G жиынын, геометриялық граф деп атаймыз.



Сур. 2 $h \rightarrow +0$ кезінде G графына өтуі

1 пункттегі белгілеуді сақтап, сырықтың нөмерін білдіретін жаңадан индекс енгіземіз. Мысалы, n – ші сырық жаңа белгілеулерде мынадай түрде

$$S_n(h) = \left\{ x = (y^n, z^n) : z^n \in \left(-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2} \right), h^{-1}y^n \in \omega^n(z^n) \right\}$$

$Q_m(h) = \{x \in R^3 : h^{-1}(x - P_m) \in Q_m(1)\}$ түйінінің прототипі. $Q_m(1)$ жиынын, ω^n белгілі және h параметрінен тәуелсіз деп есептейміз.

1.6 Серпімділік теориясының теңдеулері

$\Omega(h)$ –серпімді анизотропты біртекті емес дене деп есептейміз. $x = (x_1, x_2, x_3)$ координаттар жүйесіндегі матрицалық тепе-теңдік теңдеулері мынадай түрде

$$L(h, x, \nabla_x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in Q(h) \tag{1.9}$$

L операторы (1.1) теңдеуін жазу кезінде енгізілді. $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ векторы–орын ауыстыру векторы, $f = (f_1, f_2, f_3)$ – көлемдік күштер. Енді (2.1)-ге шекаралық шарттарды қосамыз. $\Gamma(h) = \Gamma_{m_1}(h) \cup \dots \cup \Gamma_{m_j}(h)$ болсын, $\partial Q_m(h)$ шекарасының бекітілген бөлігі. Сондай-ақ, $j \geq 1$ деп есептейміз. Бекітілу болмауы мүмкін. Орын ауыстыру векторы u Дирихле шартын қанағаттандырады.

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma(h) \tag{1.10}$$

$\partial\Omega(h)\Gamma(h)$ қысылмаған бетінде $\Omega(h)$ денесінің Нейманның шекаралық шарттары беріледі

$$B(h, x, \nabla_x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \partial\Omega(h)\overline{\Gamma(h)} \quad (1.11)$$

B операторы 1.2 бөлімде анықталған.

1.7 Сырықтардың бірігуі кезіндегі шекті теңдеулер жүйесі.

Бұл пункте $h \rightarrow 0$ кезінде шекке өту орындалады. Нәтижесінде (1.9) жүйесі G графының доғасындағы теңдеулерге өтеді, ал (1.10) шекаралық шарттары G графының төбесіндегі шекаралық шарттарға өтеді. Сұрақты күрделірек қойсақ: шекті графтың шекаралық емес төбелерінде шарттар қандай болады? Бұл шарттар кейде жұптасу немесе желімдеу шарттары деп аталады. Ереже бойынша, байланыс шарттары Кирхгоф шарттары деп аталады. Екінші ретті дифференциалдық теңдеулер үшін бұл біріншіден, әр шекарасыз төбедегі үздіксіздікті білдіреді. Екіншіден, ағын теңгерімін сақтау үшін. Жабысу шарттары туралы толық ақпаратты [15, 16]. жұмыстардан табуға болады. [17, 18, 19, 20] Жұмыстарында көрсетілгендей шекте Кирхгоф шарттары әрдайым бола бермейді. Буын маңындағы көлемнің кішірею жылдамдығы бағыттаушылардың көлденең қимасының ауданынан төмен болғанда, неғұрлым күрделі энергияға тәуелді немесе бөлінетін шарт туындауы мүмкін.

С.А. Назаров пен А.С. Слуцкий [21, 22, 23] жұмыстарында, алгебралық белгісіздер шекті есепте пайда болатыны және кейбір теңдеулер функциялардың нөлдік орташасы бар ішкі кеңістігіне проекцияланатыны атап өтілген. Сонымен қатар, кейбір түйіндерде локальды емес желімдеу шарттары туындайды. Сонымен, алдыңғы тұжырымдарға сәйкес G графының e_n әрбір доғасына $n = 1, \dots, N$ және $z_n \in \left(-\frac{l_n}{2}, \frac{l_n}{2}\right)$ кезінде дифференциалдық теңдеулер жүйесі орындалады.

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dz_n^2} \left(\mu_n(z_n) \left(\alpha_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} + b_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} - d_n(z_n) \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_1^n(z_n), \\ \frac{d^2}{dz_n^2} \left(\mu_n(z_n) \left(b_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} + c_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} - l_n(z_n) \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_2^n(z_n), \\ -\frac{d^2}{dz_n^2} \left(\mu_n(z_n) \left(-d_n(z_n) \frac{d^2 w_1^n(z_n)}{dz_n^2} - l_n(z_n) \frac{d^2 w_2^n(z_n)}{dz_n^2} + \frac{dw_3^n(z_n)}{dz_n} \right) \right) = F_3^n(z_n), \\ -\frac{d}{dz_n} \left(\mu_n(z_n) \left(\alpha^4 h_n(z_n) \frac{dw_4^n(z)}{dz_n} \right) \right) = F_4^n(z), \end{cases} \quad (1.12)$$

Қатаң бекітілу шарты бар ұштарына Дирихле шарты жазылады

$$w_q^k(z_k) = 0, q = 1, 2, 3, 4, \quad \frac{d}{dz_k} w_1^n(z_k) = 0, \quad \frac{d}{dz_k} w_2^n(z_k) = 0 \quad (1.13)$$

мұнда z_k немесе $\left(+\frac{l_n}{2}\right)$, немесе $\left(-\frac{l_n}{2}\right)$.

мұнда k (1.10) сәйкес ұштары қатаң бекітілген сырықтардың нөмірлері.

Енді шектеусіз төбелерде желімдеу шарттарын жазу қалады. Әр төбенің орналасуы P_m $m = 1, 2, \dots, M$ кезінде тоғыз санмен сипатталады.

$$(b_1^m, b_2^m, b_3^m, b_4^m, b_5^m, b_6^m) \text{ және } (\beta_1^m, \beta_2^m, \beta_3^m) \quad (1.14)$$

Жалпы алғанда, z_m ось бағытында b_3^m және β_3^m түйіндердің ауытқуы деп аталады.

w_1^n , w_2^n ауытқулары, w_3^n бойлық созылу және бұрыштық бұруларынан w_4^n басқа, сырықтардағы ауытқуды z^n осі бағыттарында тұрақты α_3^n ауытқуымен сипатталатын болады.

Қандай бір $S(h)$ сырық $Q_m(h)$ түйінімен бірігеді, онда байланысудың келесі түрлері орындалады:

- Қатаң бекітілу;
- Қозғалысы аз түйін;
- Бір белгіленген бағытта қозғалмалы түйін;
- Бір белгіленген бағытта қозғалмайтын түйін;
- Қозғалмалы түйін.

Төбедегі бірігу бекітілуіне категориясына қарай (1.14) жиынтықтарының арасында кейбір белгілі алгебралық қатынастар орындалады.

$$w_1^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), w_2^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), w_3^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), w_4^n\left(\pm\frac{l_n}{2}\right), \frac{d}{dz_n} w_1^n\left(\pm\frac{l}{2}\right), \frac{d}{dz_n} w_2^n\left(\pm\frac{l}{2}\right), \alpha_3^n, \alpha_3^n \quad (1.15)$$

$Q_m(h)$ түйінінде бірнеше сырық кездескен жағдайда $S(h)$, $n \in B(m) \subset \{1, 2, \dots, N\}$ $n \in B(m)$ кезінде (1.14) және (1.15) жиынтықтарының арасында дәл осындай алгебралық қатынастар пайда болады. Қажетсіз мәліметтермен шамадан тыс жүктемеу үшін, айталық олардың сандары мен сәйкес алгебралық қатынастары (1.12), (1.13) жүйесі көрсетілген қатынастардың шешімі боладатындай таңдап алынды.

Жеке жұмыста біз әртүрлі бекітулер категориялары туындаған кезде сырықтардың байланыстарының мысалдарын келтіреміз. Біз сондай-ақ осындай құрылымдардың еркін тербелістерінің меншікті жиіліктерін есептейміз.

2 БІРНЕШЕ СЫРЫҚТЫҢ БӨЛІКТЕРІНЕН ҚҰРАЛҒАН КОНСТРУКЦИЯНЫҢ БОЙЛЫҚ ТЕРБЕЛІСІ

Алдыңғы тарауда бірнеше бөліктерден құралған конструкция $h \rightarrow 0$ кезінде шекті графқа өтетіні көрсетілді. Сондай-ақ сызықты серпімділік теориясының теңдеулері сәйкесінше графта бірөлшемді дифференциалдық теңдеулер жүйесіне өтеді. Сырықтардың байланысқан жеріндегі түйініне сәйкес болатын графтың төбелерінде Кирхгоф деп аталатын шарттар орындалуы мүмкін. Сырықтың беттік жағына сәйкес келетін графтың төбелерінде шекаралық шарттар деп аталатын шарттар пайда болады. Сырықтың беттік жағының бекітілуі әртүрлі болуы мүмкін. Бұл тарауда мынадай сұраққа жауап ізделінеді: бойлық тербелістердің меншікті мәндері (жиіліктері) нақты мәнге ие болу үшін графтағы шекаралық шарттарды қалай таңдау қажет? Себебі тек нақты меншікті мәндер (оң) сырықтардың серпімділік теориясында қолданысқа ие. Екінші тарауда сырықтардың бойлық тербелісі зерттелетіндіктен шекті графтың доғаларында екінші ретті дифференциалдық теңдеулер беріледі. Бұл жағдай (1.14) теңдеулер жүйесінің үшінші теңдеуіндегі $d_n(z_n) = 0, l_n(z_n) = 0, n = 1, \dots, N$ шамаларына сәйкес келеді.

2.1 Дифференциалдық операторлар үшін Лагранж формуласы және ағаштағы максимал оператордың өз-өзіне түйіндес тарылуы

2 тарау ағашта анықталған сызықты дифференциалдық операторларға арналған. Осы тараудың мақсаты ағаштағы максимал дифференциалдық оператордың қисынды шектелуін алу. 2 тарауда максимал оператордың барлық өз-өзіне түйіндес шектеулері көрсетілген, сондай-ақ максимал оператордың барлық қайтымды шектеулері көрсетілген. Сонымен қатар 2 тарауда ағаштағы дифференциалдық операторлар үшін ішкі төбелерінде Кирхгоф шарттарын қанағаттандыратын Лагранж формуласын келтірдік.

$\mathfrak{Z} = \{\nu, \varepsilon\}$ ағаш болсын. Мұндағы \mathfrak{Z} графының ν төбелер жиыны және ε доғасының жиыны. Егер бір төбеден басқа әрбір төбесінде бір кіріс доғасы бар болса, онда бағытталған граф - бұл ағаш. Кіріс доғалары жоқ төбелер ағаштың тамыры деп аталады. Ағаштың маңызды қасиеттерінің бірі тамыр мен кез-келген төбені біріктіретін жалғыз жол табылады.[11] Жолдың ұзындығы ағаштың төбесінің биіктігін анықтайды. Шеткі емес төбелерін ішкі төбелер деп атаймыз және \mathcal{I} арқылы белгілейміз. Шығатын доғалары жоқ төбелер шекаралық төбелер деп аталады және Γ деп белгіленеді. Алдымен, біз шекаралық төбелерін 0-ден p дейін нөмірлейміз. Алдағы уақытта, біз ішкі төбелерін $p+1$ ден r -ге дейін мына ереже бойынша нөмірлейміз: төбенің биіктігі үлкен болса онда нөмірдің саны да үлкен болады. j төбесінен шығатын доғаны m_j арқылы белгілейді. Жалпылықты жоғалтпай, әрбір доғаның ұзындығы шектелген деп есептейміз. j төбесінде бітетін доғаны e_j деп белгілейміз. e_j доғасындағы $y(x)$ функциясын $y_j(x_j), x_j \in e_j$ арқылы белгілейміз.

Тамырдан шығатын және j төбесінде бітетін жолды s_j деп белгілейміз, және оның ұзындығы $|s_j| - 1$. Алдағы уақытта, біз тамырдан жалғыз ғана доға шығады деп болжаймыз.

2.2 Ағашта максимал оператордың анықталуы

Ағашта максимал операторларды енгізу үшін $\vec{Y}(\vec{X}) = [y_j(x_j), j = 1, \dots, r]^r$ вектор функцияларын қарастырамыз. Ол функцияларын келесі функцияналдық кеңестікте $L_2(\mathfrak{Z}) = \prod_{j=1}^r L_2(e_j)$ қарастырайық.

(мұндағы $\vec{X} = (x_j, j = 1, \dots, r)$ мен $\prod_{j=1}^r$ ішкікеңістіктердің декарттық көбейтіндісі) және ақырлы нормасы

$$\|\vec{Y}\|_{L_2(\mathfrak{Z})} = \sqrt{\sum_{j=1}^r \int_{e_j} |y_j(x_j)|^2 dx_j}$$

Стандартты түрде

$$W_2^2(\mathfrak{Z}) = \prod_{j=1}^r W_2^2(e_j)$$

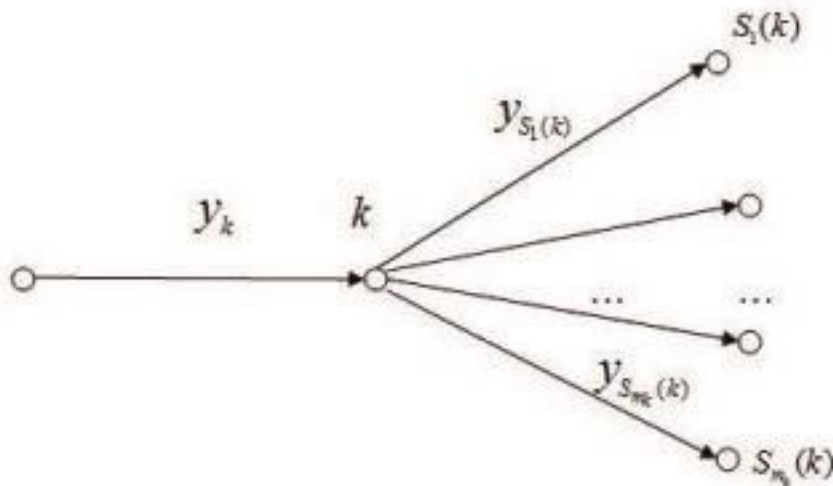
кеңістігі енгізіледі.

Элементтері әрбір $k = p + 1, \dots, r$. ішкі төбелерінде Кирхгоф шарттар қанағаттандыратын $D\Lambda(\max) \subset W_2^2(\mathfrak{Z})$ функциялар жиынын енгіземіз.

$$y_k(1) = y_{s_1(k)}(0) = \dots = y_{s_{m_k(k)}}(0) \quad (2.1)$$

$$y'_k(1) = y'_{s_1(k)}(0) = \dots = y'_{s_{m_k(k)}}(0) \quad (2.2)$$

Мұнда $s_1(k), \dots, s_{m_k(k)}$ - k төбесінен шыққан доғалардың нөмерлері. (сур.1)



Сурет-3. Ішкі k-ші төбесінде шешімнің таралуы.

Сызықты дифференциалдық өрнектер арқылы берілген $D\Lambda(\max)$ анықталу облысы бар Λ_{\max} операторы

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = p^2 y_j(x_j), \quad e_j \in \varepsilon, \quad 0 < x_j < 1, \quad (2.3)$$

Максимал оператор деп атаймыз. Мұндағы $\{q_j(x_j), x_j \in e_j \in \varepsilon, 0 < x_j < 1\}$ әдетте потенциал деп аталатын нақты үзіліссіз функциялар жиыны. Ішкі төбелеріндегі Кирхгоф шарттарының жалпы саны $2r - p - 1$ тең екендігін көреміз.

2.3 Ағашта анықталған дифференциалдық операторлар үшін Лагранж формуласы

Кесіндіде дифференциалдық операторларды зерттеген кезде Лагранж формуласы маңызды рөл атқарады. Бұл пункте ағаштағы дифференциалдық операторлар жағдайындағы Лагранж формуласының аналогын келтіреміз.

Лемма 2.1. $w_2^2(\mathfrak{S})$ -дан кез келген $\bar{Y}(x) = \{y_j(x_j), j = 1, \dots, r\}, \bar{V}(x) = \{v_j(x_j), j = 1, \dots, r\}$ функциясы үшін теңдік орындалады

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= \sum_{k=1}^r [-y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)}] + \\ &+ \sum_{k=p+1}^r [y'_k(0) \overline{v_k(0)} + y_k(0) \overline{v'_k(0)}] + \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

Мұнда \bar{z} z санының комплекс түйіндесі

Дәлелдеуі. (2.1) сол жақ бөлігіндегі $\sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j$ қарастырайық.

Интеграл e_j доғасындағы интегралды келесі түрде

$$\int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j = \int_0^1 (-y''(x_j) + q_j(x_j) y(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j.$$

$\int_0^1 (-y''(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j$ өрнегін бөліктеп, еселеп интегралдау арқылы

$$\int_0^1 (-y''(x_j)) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \left[-y'_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} + y_j(x_j) \overline{v'_j(x_j)} \right]_{x_j=0}^{x_j=1} + \int_0^1 y_j(x_j) \overline{(-v''_j(x_j))} dx_j$$

e_1, \dots, e_r барлық доғалар $x=1$ аяқталатынын және тек ғана e_{p+1}, \dots, e_r доғалары $x=0$ бастау алатынын ескерсек, (2.2) қатынасынан (2.1) леммасының тұжырымдамасы шығады.

Лемма 2.2 Λ_{\max} максимал оператордың анықталу облысынан кез келген $\bar{Y}(x) = \{y_j(x_j), j=1, \dots, r\}, \bar{V}(x) = \{v_j(x_j), j=1, \dots, r\}$ функциясы үшін мына теңдік орындалады

$$\sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \sum_{k=1}^p \left[-y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)} \right] + \left[y'_{p+1}(0) \overline{v_{p+1}(0)} - y_{p+1}(0) \overline{v'_{p+1}(0)} \right] + \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda_{\max} v_j(x_j)} dx_j \quad (2.5)$$

Дәлелдеуі. $j = p+1, \dots, r$ мәндерінің біреуін қабылдайды деп болжаймыз. Онда j үлесі – төбелерінің мүшеге

$$\sum_{k=1}^p \left[-y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)} \right] + \sum_{k=p+1}^r \left[y'_{p+1}(0) \overline{v_{p+1}(0)} - y_{p+1}(0) \overline{v'_{p+1}(0)} \right] \quad (2.6)$$

Интегралдары жоқ өрнектерді келесі түрде

$$\left[-y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)} \right] + \sum_{k=p+1}^r \left[y'_{s_k(j)}(0) \overline{v_{s_k(j)}(0)} - y_{s_k(j)}(0) \overline{v'_{s_k(j)}(0)} \right] \quad (2.7)$$

(2.1) шарты бойынша (2.7) суммасының мәнін есептейміз, онда

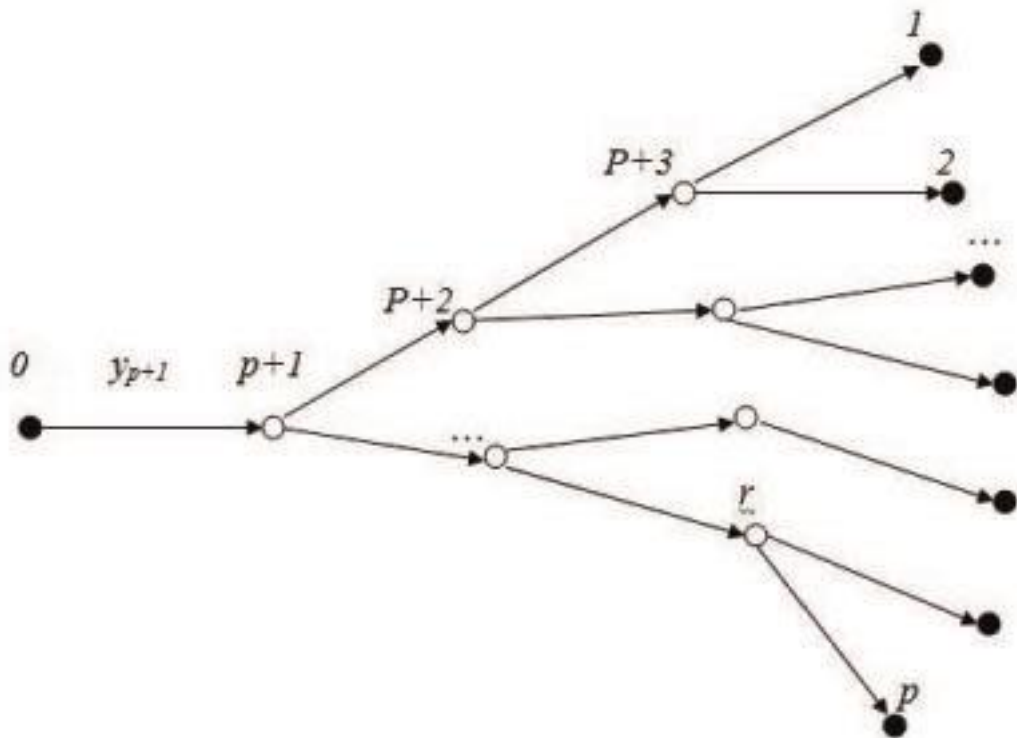
$$\left[-y'_k(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v'_k(1)}\right] + \overline{v_j(1)} \sum_{k=1}^{m_j} y'_{s_k(j)}(0) - y_j(1) \sum_{k=1}^{m_j} \overline{v'_{s_k(j)}(0)}.$$

(2.2) Кирхгоф шарты бойынша соңғы өрнекті есептейміз, онда алатынымыз

$$\left[-y'_j(1)\overline{v_j(1)} + y_j(1)\overline{v'_j(1)}\right] + \overline{v_j(1)}y'_j(1) - y_j(1)\overline{v'_j(1)} = 0 \quad (2.8)$$

(2.8) қатынасы, (2.6) интегралдары жоқ $p+1, \dots, r$ ішкі төбелерінің мүшеге үлесі, нөлге тең екендігін білдіреді. Сондықтан (2.6) тек $0, \dots, p$ шекаралық төбелерінің үлесін ескеру қажет. Онда $1, \dots, p$ шекаралық төбесіне енетін e_1, \dots, e_p доғасында анықталған $x=1$ кезіндегі $y_j(x), y'_j(x), \overline{v_j(x)}, \overline{v'_j(x)}$, $j=1, \dots, p$ функция мәндері қалады. Сондай-ақ 0 төбесінен шыққан және $p+1$ төбесіне бағытталған e_{p+1} доғасында анықталып $x=0$ кезіндегі $y_{p+1}(x), y'_{p+1}(x), \overline{v_{p+1}(x)}, \overline{v'_{p+1}(x)}$ функция мәндері қалады. (Сур. 4)

$$\sum_{k=1}^p \left[-y'_k(1)\overline{v_k(1)} + y_k(1)\overline{v'_k(1)}\right] - \left[-y'_{p+1}(0)\overline{v_{p+1}(0)} - y_{p+1}(0)\overline{v'_{p+1}(0)}\right]$$



Сурет 4. r төбелері бар ағаш-граф (шекаралық төбелер - боялған).

Лемманың дәлелдеуі орындалды.

(2.4) Леммасынан, (2.5) интегралдық емес мүшелердегі ішкі төбелерінің суммарлық үлесі нөлге тең екендігі шығады. Басқаша айтқанда, (2.5) өрнегінің интегралдық емес мүшелеріне тек шекаралық төбелер үлесі тиесілі.

$k = 1, \dots, 2(p+1)$ үшін келесі шекаралық формаларды қарастырайық

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{j=1}^p [\alpha_{kj} y_j(1) + \beta_{kj} y'_j(1)] + [\alpha_{k,p+1} y_{p+1}(0) + \beta_{k,p+1} y'_{p+1}(0)] \quad (2.9)$$

мұндағы $\alpha_{kj}, \beta_{kj}, \alpha_{k,p+1}, \beta_{k,p+1}$ қандай да бір константалар.

Теорема 2.1 Лагранж формуласы. $\{U_1, \dots, U_{2(p+1)}\}$ сызықты тәуелсіз шекаралық шарттарының формасы болсын. Онда максимал оператордың анықталу облысынан Λ_{\max} кез келген $\vec{Y}(x) = \{y_j(x_j), j = 1, \dots, r\}, \vec{V}(x) = \{v_j(x_j), j = 1, \dots, r\}$ функциясы үшін келесі түрдегі теңдік орындалатындай жалғыз шекаралық формалар жиыны $\{T_1, \dots, T_{2(p+1)}\}$ табылады.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j &= U_1(\vec{Y}) \overline{T_{2(p+1)}(\vec{V})} + U_2(\vec{Y}) \overline{T_{2(p+1)-1}(\vec{V})} + \dots + \\ &+ U_{2(p+1)}(\vec{Y}) \overline{T_1(\vec{V})} + \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \Lambda_{\max} v_j(x_j) dx_j \end{aligned} \quad (2.10)$$

Дәлелдеуі. Айырманы енгіземіз

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j - \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \Lambda_{\max} v_j(x_j) dx_j.$$

2.2 леммаға сәйкес бұл айырма мынадай түрде беріледі

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{k=1}^{2(p+1)} [-y'_k(1) \overline{v_k(1)} + y_k(1) \overline{v'_k(1)}] + [y'_{p+1}(0) \overline{v_{p+1}(1)} + y_{p+1}(1) \overline{v'_{p+1}(1)}] \quad (2.11)$$

Осылайша, $\{y_j(1), y'_j(1), j = 1, \dots, p\}, \{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0)\}$ шекаралық мәндерінің айырмасы $2(p+1)$ жиынтығы арқылы өрнектеледі. Аталған мәндер жиынтығы $2(p+1)$ сызықты тәуелсіз жүйені құрайды. Сондықтан мәндер жиынтығын теореманы қанағаттандыратын кез келген $\{U_1, \dots, U_{2(p+1)}\}$ шекаралық формалардың сызықты комбинациясы ретінде өрнектеуге болады. Бұл үшін (2.9) қатынасын $\{y_j(1), y'_j(1), j = 1, \dots, p\}, \{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0)\}$ қатысты алгебралық теңдеулер жүйесі ретінде қарастыруға керек. (2.9) жүйесін $\{y_j(1), y'_j(1), j = 1, \dots, p\}, \{y_{p+1}(0), y'_{p+1}(0)\}$ қатысты шешетін болсақ, онда

$$\begin{aligned}
y_j(1) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} \gamma_{kj} U_k(\vec{Y}), \quad j=1, \dots, p, \\
y'_j(1) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} \sigma_{kj} U_k(\vec{Y}), \quad j=1, \dots, p, \\
y_{p+1}(0) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} \gamma_{k,p+1} U_k(\vec{Y}), \\
y'_{p+1}(0) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} \sigma_{k,p+1} U_k(\vec{Y}).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Аталған өрнекті (2.11) айырмасына қойсақ

$$\begin{aligned}
R(\vec{Y}, \vec{V}) &= \sum_{k=1}^p \left[- \left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \sigma_{jk} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_j(1)} + \left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \gamma_{jk} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v'_j(1)} \right] + \\
&+ \left[\left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \sigma_{j,p+1} U_j(\vec{Y}) \right) \overline{v_{p+1}(0)} - \left(\sum_{j=1}^{2(p+1)} \gamma_{j,p+1} U_{p+1}(\vec{Y}) \right) \overline{v'_{p+1}(0)} \right]
\end{aligned}$$

Енді соңғы теңдіктің оң жақ бөлігін $\{U_k(\vec{Y})\}$ қатысты топқа бөлсек, онда алатынымыз

$$R(\vec{Y}, \vec{V}) = \sum_{j=1}^{2(p+1)} U_j(\vec{Y}) \left\{ \sum_{k=1}^p [-\sigma_{jk} \overline{v_j(1)} + \gamma_{jk} \overline{v'_j(1)}] + [\sigma_{j,p+1} \overline{v_{p+1}(0)} + \gamma_{j,p+1} \overline{v'_{p+1}(0)}] \right\}.$$

Егер соңғы өрнектегі қосындыны квадрат жақша арқылы белгілесек

$$T_{2(p+1)-k+1}(\vec{V}) = [-\bar{\sigma}_{jk} \overline{v_j(1)} + \bar{\gamma}_{jk} \overline{v'_j(1)}] + [\bar{\sigma}_{j,p+1} \overline{v_{p+1}(0)} + \bar{\gamma}_{j,p+1} \overline{v'_{p+1}(0)}],$$

Енді ізделінді формуланы аламыз

$$\sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda_{\max} y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \sum_{j=1}^{2(p+1)} U_k(\vec{Y}) \overline{T_{2(p+1)-k+1}(\vec{V})} + \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \Lambda_{\max} \overline{v_j(x_j)} dx_j$$

(2.10) формуласы Лагранж формуласы деп аталады.

2.1 теоремасынан бірден салдары шығады

Салдар 2.1. $D(\Lambda) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : U_1(\vec{Y}) = 0, \dots, U_{p+1}(\vec{Y}) = 0\}$ анықталу облысындағы Λ_{\max} операторының Λ тарылуы болсын. Онда Λ^* түйіндес операторы да $D(\Lambda) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : U_1(\vec{Y}) = 0, \dots, U_{p+1}(\vec{Y}) = 0\}$ анықталу облысындағы Λ_{\max} операторының тарылуы болады және кез келген $\vec{Y} \in D(\Lambda)$ и $\vec{V} \in D(\Lambda^*)$ үшін теңдік орынды.

$$\sum_{j=1}^r \int_{e_j} \Lambda y_j(x_j) \overline{v_j(x_j)} dx_j = \sum_{j=1}^r \int_{e_j} y_j(x_j) \overline{\Lambda^* v_j(x_j)} dx_j$$

2.4 Λ_{\max} максимал оператордың өз-өзіне түйіндес тарылуы

Бұл пункте Λ_{\max} операторының барлық өз-өзіне түйіндес тарылулары сипатталған. Алдымен Λ_{\max} операторының Λ_0 минимал тарылуын енгіземіз. $D(\Lambda_0)$ арқылы.

$$\begin{aligned} y_j(1) = 0, y'_j(1) = 0 \quad \text{при } j = 1, \dots, p \\ y_{p+1}(0) = 0, y'_{p+1}(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

шарттарды қанағаттандыратын барлық $\vec{Y}(x) \in D(\Lambda_{\max})$ функциялар жиынтығын белгілейміз.

Әрі қарай Λ_0 минимал тарылуын формула бойынша енгіземіз

$$\Lambda_0 \vec{Y} = \Lambda_{\max} \vec{Y}, \quad \vec{Y} \in D(\Lambda_0).$$

Тұжырымдамалар орынды

1) Кез келген $\vec{Y} \in D(\Lambda_0), \vec{V} \in D(\Lambda_{\max})$ элементтері үшін

$$\langle \Lambda_0 \vec{Y}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}, \Lambda_{\max} \vec{V} \rangle \quad (2.14)$$

катынас орынды

2) Кез келген $\vec{Y} \in D(\Lambda_0), \vec{V} \in D(\Lambda_{\max})$ элементтері үшін теңдік орынды

$$\langle \Lambda_0 \vec{Y}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{Y}, \Lambda_0 \vec{V} \rangle$$

(2.14)-тен $\Lambda_{\max} \subset \Lambda_0^*$ оператор енгізілуі орындалады.

Минимал оператор қасиеттерін зерттеуде Λ_{\max} максимал оператордың тарылулары болып табылатын Λ_1 және Λ_2 операторларын енгізу ыңғайлы болады.

$$D(\Lambda_1) = \{ \vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_j(1) = 0, j = 1, \dots, p, y_{p+1}(0) = 0 \} \text{ болсын}$$

$$\text{және } \vec{Y} \in D(\Lambda_1) \text{ кезінде } \Lambda_1 \vec{Y} = \Lambda_{\max} \vec{Y}$$

Болжам 2.1. $L_2(\mathfrak{S})$ -ден кез келген $\vec{F}(x)$ функциясы үшін

$$\Lambda_i \vec{Y}(x) = \vec{F}(x), \quad i = 1, 2 \quad (2.15)$$

теңдеуінің $D(\Lambda_i)$, $i = 1, 2$ жалғыз шешімі болады.

Ескерту 2.1. $D(\Lambda_i)$, $i=1,2$ жиынындағы (2.15) операторлық теңдеу I ішкі төбелерінде $2|\varepsilon| - p - 1$ Кирхгоф шарттарын қанағаттандыратын ε доғалар жиынының сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесіне эквивалентті және $p+1$ шарттары Γ төбесіндегі шекаралық шарттарына эквивалентті. Осылайша жалпы шешімінің құрамында $2|\varepsilon|$ константасы бар ε доғалар жиынының біртекті емес сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі пайда болады. Оларды анықтауда $(2|\varepsilon| - p - 1) + 1 = 2|\varepsilon|$ сызықты шарттары бар. Бұдан, $2|\varepsilon|$ өлшемді $D_i, i=1,2$ қандай да бір анықтауышты бөліп аламыз. Онда (5.3) теңдеуінің бірімәнді шешімділігі бөліп алынған нөлден өзгеше $D_i, i=1,2$ $2|\varepsilon|$ анықтауышына эквивалентті болады.

[29] монографиясы бойынша, келесі екі лемманы тұжырымдайық.

Лемма 2.3. 3 пункте енгізілген \mathfrak{Z} графтағы Λ_{\max} максимал операторы болсын және $\vec{F}(x)$ функциясы $L_2(\mathfrak{Z})$ -ден. Болжам 2.1 орындалатын болса, онда,

$$\Lambda_{\max} \vec{Y}(x) = \vec{F}(x),$$

Теңдеуінің шешімі $\vec{Y}(x)$, (2.13) шарттарын қанағаттандырады сонда тек сонда, егер $\vec{F}(x)$ функциясы $\text{Ker} \Lambda_{\max}$ барлық элементтеріне ортогональ болатын болса.

Дәлелдеуі. Болжамға 2.1 сәйкес, $i = 1$ кезіндегі (2.15) операторлық теңдеуінің жалғыз шешімін $\vec{Y}(x)$ арқылы белгілейміз. Әрі қарай $\Lambda_{\max} \vec{V} = 0$ біртекті операторлық теңдеуінің: біреусінен басқа $v_{p+1,l}(0)$ кезіндегі барлық $v_{jl}(1)$ шекаралық формалар нөлге тең, ал формаларды бірі 1-ге тең шарттарын қанағаттандыратын фундаментальді шешімдер жүйесін $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{p+1}$ арқылы белгілейміз. Бұндай фундаментальды жүйе бар. Шешімділік шартының нөлден өзгеше D_i анықтауышына эквивалентті болғандықтан бұл ескертпе 1 шығады.

$\vec{Y}(x)$ және $\vec{V}_k(x)$ функцияларына Лагранж формуласын қолдансақ, онда алатынымыз

$$\langle \vec{F}, \vec{V}_k \rangle = \langle \Lambda_{\max} \vec{Y}, \vec{V}_k \rangle - \langle \vec{Y}, \Lambda_{\max} \vec{V}_k \rangle \quad (2.16)$$

Бірақ $\Lambda_{\max} \vec{V}_k = 0$. Бұдан бөлек, $\vec{Y} \in D(\Lambda_1)$ енгізуінен шығатыны

$$\sum_{l=1}^p y_l(1) v'_{kl}(1) - y_{p+1}(0) v'_{k,p+1}(0) = 0.$$

Бұдан, (2.16) формуласы

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}, \vec{V}_k \rangle &= -\sum_{l=1}^p y'_l(1)v_{kl}(1) + y'_{p+1}(0)v_{k,p+1}(0) = 0 \\ &= \begin{cases} -y'_l(1) & \text{if } v_{kl}(1)=1, \\ y'_{p+1}(0) & \text{if } v_{k,p+1}(0)=1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.17) қатынасынан 2.3 леммасының тұжырымдамасы шығады сонда тек сонда егер $\langle \vec{F}, v'_k \rangle = 0$, $k = 1, \dots, \chi$. Осылайша, $\vec{F}(x) \Lambda_{\max} V = 0$ теңдеуінің барлық шешіміне ортогональ.

Лемма 2.4. $k = 1, \dots, p$ кезінде α_k, β_k қандай болмасын және $\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}$ болжам 1 орындалғанда

$$y'_k(1) = \beta_k, y_k(1) = \alpha_k, k = 1, \dots, p,$$

$$y'_{p+1}(0) = \beta_{p+1}, y_{p+1}(0) = \alpha_{p+1}$$

шарттарын қанағаттандыратын $\vec{Y}(x) \in D(\Lambda_{\max})$ функциясы бар.

Дәлелдеуі. Алдымен лемма 2.4 барлық $\alpha_k = 0$ жағдайы үшін дәлелдейік. $\vec{F}(x) \in L_2(\mathfrak{S})$ -ті

$$\langle \vec{F}, \vec{V}_k \rangle \begin{cases} -\beta_l & \text{if } v_{kl}(1)=1, \\ \beta_{p+1} & \text{if } v_{k,p+1}(0)=1, \end{cases} \quad (2.18)$$

орындалатындай таңдап аламыз, мұнда v_k , $k = 1, \dots, p+1$ - лемма 2.3 дәлелдеуі кезіндегі фундаментальді жүйе. Бұндай элемент бар және $\text{Ker} \Lambda_{\max}$ үшін де. Шынында, егер қоятын болсақ

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{p+1} \mu_k \vec{V}_k,$$

Онда (2.18) шарттары $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{p+1}$ сызықты тәуелсіз функциялар анықтаушы Грама анықтаушы болып табылатын μ_1, \dots, μ_{p+1} тұрақтыларына қатысты теңдеулер жүйесі болады. Бұдан, ол нөлден өзгеше. Обозначим через \vec{v} арқылы $\Lambda_1 \vec{V} = \vec{F}$ теңдеуінің шешімін белгілейік. Онда Лагранж формуласынан

$$\begin{aligned} \vec{V}'(1) &= \beta_j \quad j = 1, \dots, p \quad \text{үшін,} \\ \vec{V}'(0) &= \beta_{p+1} \end{aligned}$$

Сонымен, құрылған $\vec{V}(x) \in D(\Lambda_{\max})$ функция

$$\vec{V}'(1) = \beta_j, \vec{V}'(1) = 0 \quad j = 1, \dots, p \text{ үшін } \vec{V}'(0) = \beta_{p+1}, \vec{V}'(0) = 0.$$

α_e және β_e жиынтықтарының рөлдерін ауыстырсақ, сондай-ақ Λ_1 және Λ_2 операторларының, онда 2.4 леммасының толық дәлелдеуін аламыз.

Енді Λ_0 минимал операторға қатысты тұжырымдаманы орындасақ болады.

Лемма 2.5. $\Lambda_0 \subset \Lambda_0^* = \Lambda_{\max}, \Lambda_{\max}^* = \Lambda_0$.

Лемма 2.5 [28] монографияда V §17 тұжырымдамасы дәлелденгендей дәлелденеді.

Бұл пункттің негізгі теоремасы.

Теорема 2.2. болжам 2.1 орындалған кезде Λ_0 операторының Λ операторының кез келген өз-өзіне түйіндес кеңейтілуі $k = 1, \dots, p+1$ түріндегі тәуелсіз шекаралық шарттармен анықталады.

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{j=1}^p [\alpha_{jk} y_j(1) + \beta_{jk} y'_j(1)] + [\alpha_{p+1,k} y_{p+1}(0) + \beta_{p+1,k} y'_{p+1}(0)] = 0 \quad (2.19)$$

мұнда α_{jk}, β_{jk} — қандай да константалар, сондай-ақ

$$\sum_{j=1}^p [\alpha_{jk} \bar{\beta}_{jk} - \bar{\alpha}_{jk} \beta_{jk}] = \alpha_{p+1,k} \bar{\beta}_{p+1,k} - \bar{\alpha}_{p+1,k} \beta_{p+1,k} \quad (2.20)$$

$j, k = 1, \dots, p$ үшін

Керісінше, болжам 2.1 орындалса, онда (2.20) қатынасын қанағаттандыратын (2.19) түріндегі кез келген сызықты тәуелсіз шекаралық шарттар, Λ_0 операторының қандай да бір өз-өзіне түйіндес кеңейтілуінің Λ анықталу обласын анықтайды.

Дәлелдеуі. [28] монографияда §18 көрсетілген теорема 2.2 дәлелдеу схемасына сүйене отырып, $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{p+1}$ функциясын енгіземіз. Нақтырақ айтсақ, $D(\Lambda_{\max})$ анықталу облысынан \vec{V}_k шарттарымен

$$\begin{aligned} v'_{kj}(1) &= \alpha_{jk}, v_{kj}(1) = -\beta_{jk} \text{ при } j = 1, \dots, p, \\ v'_{k,p+1}(0) &= -\alpha_{p+1,k}, v_{k,p+1}(0) = \beta_{p+1,k}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.4 леммаға сәйкес ондай шешімдер бар. Онда $k = 1, \dots, p+1$ үшін (2.19) шарты

$$U_k(\vec{Y}) = \sum_{j=1}^p [y_j(1)v'_{kj}(1) - y'_j(1)v_{kj}(1)] - [y_{p+1}(0)v'_{k,p+1}(0) - y'_{p+1}(0)v_{k,p+1}(0)] = 0.$$

[5] монографиясының нәтижелеріне сәйкес, (2.19) шекаралық шарттары Λ_0 операторының өз-өзіне түйіндес Λ кеңейтілуінің анықталу обласын анықтайды. Сонда тек сонда, егер (2.21) сәйкес анықталған $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{p+1}$ барлық функциялар қатынастарды қанағаттандырса

$$U_k(\vec{V}_j) = 0, \quad k, j = 1, \dots, p = 1$$

Теорема 2.2 толығымен дәлелденді.

2.5 Λ_{\max} максимал оператордың қисынды тарылуы

Алдыңғы бөлімде Λ_{\max} максимал операторының барлық өз-өзіне түйіндес тарылуларын сипаттадық. Λ_{\max} максимал операторының қисынды тарылуларын сипаттайық.

Λ операторы Λ_{\max} максимал оператордың қисынды тарылуы деп аталады, егер келесі шарттар орындалатын болса

(i) $\Lambda \subset \Lambda_{\max}$,

(ii) $\exists \Lambda^{-1} L_2(\mathfrak{Z})$ -де шектелген оператор болып табылады

Дифференциалдық операторлардың әртүрлі кластарының қисынды тарылуы [27, 30] жұмыстарында зерттелген. [27, 30] жұмыстары бойынша, біріншіден, Λ_{\max} максимал оператордың барлық қисынды шектеулерінен Λ_1 қандай да бір қисынды тарылуын таңдап алу қажет. Содан кейін, Λ_1^{-1} кері операторын біле отырып барлық қисынды тарылуларын сипаттау қажет.

2.6 Белгіленген қисынды тарылу үшін Грин функциясы

Λ_{\max} максимал операторының қисынды тарылуы ретінде анықталу облысы

$D(\Lambda_1) = \{\vec{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_j(1) = 0, j = 1, \dots, p, y_{p+1}(0) = 0\}$ болатын $\Lambda_1 \subset \Lambda_{\max}$ операторын аламыз.

Әрі қарай, $i=1$ үшін болжам 1 орындалды деп есептейміз. Болжам 1 бойынша $L_2(\mathfrak{Z})$ кеңістігінде $i=1$ үшін шектелген Λ_1^{-1} оператор бар. Бұл пунктте Λ_1^{-1} кері операторының құрылымын анықтаймыз. Сонымен, $L_2(\mathfrak{Z})$ -дегі \vec{F} үшін операторлық теңдеуді $\Lambda_1 \vec{Y} = \vec{F}$ қарастырамыз. Бізге оның $\vec{Y} = \{y_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\} \in D(\Lambda_1)$ шешімін $\vec{F} = \{f_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\} \in D(\Lambda_1)$ арқылы

өрнектеу қажет. Белгілі болғандай [29], e_j доғасында $y_j(x_j)$ функциясы, теңдеуді қанағаттандырады.

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = f_j(x_j), x \in e_j$$

Әрі қарай белгілеу енгізу ыңғайлы

$$y_j(x_j) = y_j(0)c_j(x_j) + y_j'(0)s_j(x_j) + \int_{e_j} g_j(x_j, t)f_j(t)dt \quad (2.22)$$

мұнда $\{c_j(x_j), s_j(x_j)\}$ Кошидің берілгендеріне бағынатын біртекті теңдеуінің фундаментальді шешімдерінің жиынтығы $-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = 0$ $s_j'(0) = c_j(0) = 1$, $s_j(0) = c_j'(0) = 1$. В формуле (2.22) формуласында $\tilde{g}_j(x_j, t)$ Коши функциясы берілген, мына формуламен анықталатын

$$\tilde{g}_j(x_j, t) = \begin{cases} c_j(t) & s_j(t) \\ c_j(x) & c_j(x) \end{cases}, t < x_j,$$

Әрі қарай белгілеу енгізу ыңғайлы

$$g_j(x_j, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_j \leq t < 1 \\ \tilde{g}_j(x_j, t) & \text{при } 0 \leq t < x_j \end{cases}$$

(2.22) формуласы $x_j \in e_j$ үшін келесі түрде болады

$$y_j(x_j) = y_j(0)c_j(x_j) + y_j'(0)s_j(x_j) + \int_{e_j} g_j(x_j, t)f_j(t)dt \quad (2.23)$$

Λ_1^{-1} бар болғандықтан, $y_j(0)$ және $y_j'(0)$ мәндері \bar{F} арқылы бірімәнді анықталынады. Λ_1 сызықты болғандықтан Λ_1^{-1} кері операторы сызықты. Бұдан, \bar{F} -тен тәуелді $y_j(0)$ және $y_j'(0)$ функционалдары. Из-за ограниченности Λ_1^{-1} шектелгендігінен $L_2(\mathfrak{Z})$ -дегі $y_j(0)$ және $y_j'(0)$ сызықты функционалдардың шектелгендігі шығады. Бұдан, $L_2(\mathfrak{Z})$ -дегі үзіліссіз сызықты функционалдар туралы Рисс теоремасынан $L_2(\mathfrak{Z})$ -дегі A_j және B_j функцияларының бар болуы туралы тұжырымдама шығады.

$$y_j(0) = \sum_{k=1}^r \int_{e_k} a_{jk}(x)f_k(x)dx, \quad (2.24)$$

$$y_j'(0) = \sum_{k=1}^r \int_{e_k} b_{jk}(x) f_k(x) dx.$$

(2.23) және (2.24) қатынастарынан

$$y_j(x_j) = \sum_{k=1}^r \int_{e_k} \{a_{jk}(t)c_j(x_j) + b_{jk}s_j(x_j)\} f_k(t) dt + \int_{e_j} g_j(x_j, t) f_j(t) dt. \quad (2.25)$$

Осылайша, белгіленген $x_j \in e_j$ үшін (2.25) қатынасының оң жақ бөлігі $L_2(\mathfrak{E})$ кеңістігінің скаляр көбейтіндісі түрінде болады, сондықтан (2.25) формуласы $j = 1, \dots, r$ үшін мынадай түрде түрленеді

$$y_j(x_j) = \sum_{k=1}^r \int_{e_k} d_{jk}(x_j, t_k) f_k(t_k) dt_k, x_j \in e_j, \quad (2.26)$$

мұнда $d_{jk}(x_j, t_k)$ - қандай да бір функциялар жиынтығы.

Сонымен, Λ_1^{-1} кері операторы (2.26) формуласы арқылы анықталады. Матрица $D = \|d_{jk}(x_j, t_k)\|$ матрицасы әдетте Λ_1 операторының Грин функциясы деп аталады.

Ескерту 2. Λ_1 тарылуының орнына Λ_{\max} максимал операторының басқа қайтымды тарылуларын таңдап алуға болады. Нәтижесінде, біз келесі сұраққа келеміз. Кері оператордың тарылуының қарапайым түрі қандай болу керек? Мысалы, $D(\Lambda_3) = \{\bar{y} \in D(\Lambda_{\max}) : y_j(1) = 0, j = 1, \dots, p-1, y_{p+1}(0) = y'_{p+1}(0) = 0\}$ анықталу облысындағы $\Lambda_3 \subset \Lambda_{\max}$ кері операторының тарылуы келесі түрде болады

$$y_j(x_j) = \sum_{k=2}^{|s_j|-1} \int_{e_{n_{k,j}}} d_{n_{k,j}}(x_j, t) f_{n_{k,j}}(t) dt, x_j \in e_j. \quad (2.27)$$

Мұнда $s_j = \{n_{1_j}, n_{2_j}, \dots, n_{|s_j|}, j\}$ 0 және j төбелерін біріктіретін жол. $n_{1_j} = 0, n_{2_j} = p+1, \dots, n_{|s_j|} = j$ екендігі анық. (2.27) формуласының (2.26) формуласынан айырмашылығы s_j жол түзеп отыратын доға бейнеленеді. (2.26) формуласының оң жақ бөлігінен граф ағаш болу үшін, яғни барлық доғалар (2.27) формуласында болады.

2.7 Қисынды тарылуларды сипаттау

Бұл пункте М. Отелбаев [27, 30] ұсынған схема бойынша Λ_{\max} операторының қисынды тарылуының толық сипаттамасы беріледі.

$D(\Lambda_{\max})$ жиынының кез келген элементі $\bar{H} = \{h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$ болсын. (2.26) формуласы бойынша жаңа функция енгіземіз $\bar{Z} = \{z_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$

$$z_j(x_j) \int_{e_k} d_{jk}(x_j, t_k) (-h_k''(t_k) + q_k(t_k)h_k(t_k)) dt_k, x_j \in e_j. \quad (2.28)$$

функция \bar{Z} функциясы келесі қасиеттерге ие екендігі белгілі

$$-z_j''(x_j) + q_j(x_j)z_j(x_j) = -h_j''(x_j) + q_j(x_j)h_j(x_j), x_j \in e_j, \quad (2.29)$$

$$z_{p+1}(0) = 0, z_1(1) = z_2(1) = \dots = z_p(1) = 0, \quad (2.30)$$

$$\bar{Z} \in D(\Lambda_1) \subset D(\Lambda_{\max}) \quad (2.31)$$

Басқа жағынан, (2.4) Лагранж формуласын (2.28) қатынасының оң жақ бөлігіне қолдансақ,

$$\begin{aligned} z_j(x_j) = & \sum_{k=1}^r \int_{e_k} (-d_{jk}''(x_j, t_k) + q_k(t_k)d_{jk}(x_j, t_k))h_k(t_k)dt_k \\ & + \sum_{k=1}^p \left[-h_k'(1)d_{jk}(x_j, 1) + h_k(1)\frac{\partial}{\partial t_k}d_{jk}(x_j, 1) \right] + \\ & + \left[-h_{p+1}'(0)d_{j,p+1}(x_j, 0) - h_{p+1}(0)\frac{\partial}{\partial t_{p+1}}d_{j,p+1}(x_j, 0) \right]. \end{aligned}$$

Бұдан, (2.29) және (2.30) сәйкес

$$z_j(x_j) = h_j(x_j) - h_{p+1}(0)\frac{\partial}{\partial t_{p+1}}d_{j,p+1}(x_j, 0) + \sum_{k=1}^p h_k(1)\frac{\partial}{\partial t_k}d_{jk}(x_j, 1) \quad (2.32)$$

Осылайша, келесі тұжырымдама орынды.

Лемма 2.5. (2.32) теңдігі $\bar{H} = \{h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$ барлық функциялар үшін орындалады, мұнда $\bar{Z} = \Lambda_1^{-1}(\Lambda_{\max}\bar{H})$.

2.5 леммадан салдар туындайды.

Салдар 2.2. Теңдіктер орынды

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_{p+1}}d_{p+1,p+1}(x_{p+1}, 0) \Big|_{x_{p+1}=0} &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial t_k}d_{p+1,k}(x_{p+1}, 1) \Big|_{x_{p+1}=0} &= 0, \quad k = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j, 0) \Big|_{x_j=1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_k} d_{j,k}(x_j, 0) \Big|_{x_j=1} = \delta_{jk}, \quad k = 1, \dots, p,$$

$j = 1, \dots, p$ үшін

Бұдан, біріншіден, (2.32) теңдігі $\vec{H} = \{h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$ барлық функциялар үшін орындалады, ал \vec{Z} функциясы қатынастарды қағаттандырады. Енді жаңа функцияларды келтірейік

$$w_j(x_j) = y_j(x_j) - h_{p+1}(0) \frac{\partial}{\partial t_{p+1}} d_{j,p+1}(x_j, 0) + \sum_{k=1}^p h_k(1) \frac{\partial}{\partial t_k} d_{jk}(x_j, 1), \quad x_j \in e_j \quad (2.33)$$

$j = 1, \dots, r$ үшін, мұндағы $\vec{H} \in D(\Lambda_{\max})$ -ғы кез келген функция, (2.26) формуласымен анықталған $y_j(x_j)$ функция

Теорема 2.3 (2.33) формуласы арқылы енгізілген $\vec{W} = \{w_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r\}$ функциясы, келесі есептің шешімінің түрі ретінде

$$\Lambda_{\max} \vec{W} = \vec{F}, \quad \vec{W} \in D(\Lambda_{\max}), \quad (2.34)$$

$$w_{p+1}(0) = h_{p+1}(0), \quad w_j(1) = h_j(1), \quad j = 1, \dots, r. \quad (2.35)$$

Сондай-ақ, (2.34) - (2.35) есептерінің шешімі жалғыз, яғни (2.34) - (2.35) есептерінің шешімі $\{h_{p+1}(0), h_1(1), \dots, h_p(1)\}$ жиынына тәуелді, бірақ $h_j(x_j), x_j \in e_j, j = 1, \dots, r$ функцияларына тәуелді емес.

2.3 теремасының дәлелдеуі. 1 Салдардан (2.35) теңдігінің орындалуы жүреді.

(2.34) теңдігін тексеру үшін $d_{jk}(x_j, t_k)$ Грин функциясын еске алсақ жеткілікті, $\vec{X} = (x_1, \dots, x_r) \neq \vec{T} = (t_1, \dots, t_n)$ үшін сәйкес біртекті теңдеудің шешімі бола ма. Болжам 1, (2.34) - (2.35) есептерінің шешімі $j = 1$ үшін жалғыз екендігін көрсетеді. Осылайша, 2.3 теореманың дәлелдемесі орындалды.

Енді $\Lambda_{\max} \vec{Y} = \vec{F}$ теңдеуінің қисынды шекаралық шарттарын қалай құруға болатынын көрсетейік. 6.1 теоремасын қолдана отырып $\vec{H} \in \vec{F}$ -тен үзіліссіз тәуелді екенін дәлелдесек жеткілікті. 2.3 теоремасында, яғни $D(\Lambda_{\max})$ тиесілі $L_2(\mathfrak{S})$ -ден \vec{F} -ті бейнелейтін K операторы бар.

Сонымен, $\vec{H} = K\vec{F}$ болсын. Онда задача (2.34) - (2.35) мынадай түрде

$$\Lambda_{\max} \vec{W} = \vec{F}, \quad \vec{W} \in D(\Lambda_{\max}) \quad (2.36)$$

$$w_j(1) = (K\Lambda_{\max} \bar{W})_j(1), j = 1, \dots, r, w_{p+1}(0) = (K\Lambda_{\max} \bar{W})_{p+1}(0) \quad (2.37)$$

\bar{W} функциясына қойылған (2.37) шартын, (2.36) теңдеуінің кез келген \bar{F} оң жақ бөлігіне шешімнің жалғыз болуы үшін қосымша шарттармен өзгертуімізге болады. Осылайша, каждая задача (2.36) - (2.37) әрбір есебі жаңа «шекаралық» шарттары (2.37) бар қисынды қойылған есеп болып табылады. Осылайша, келесі тұжырымдамасы орынды.

Теорема 2.4. $L_2(\mathfrak{Z})$ кеңістігін $D(\Lambda_{\max})$ -да бейнелейтін барлық үзіліссіз K операторлары үшін (2.36)-(2.37) $L_2(\mathfrak{Z})$ -гі \bar{F} үшін жалғыз орнықты шешімдері бар Кері тұжырымдамасы да орынды.

2.4 теоремасындағы K операторына сәйкес болатын тарылуды Λ_K арқылы белгілейміз. 2.3 теоремасынан теореманың тура тұжырымдамасы дәлелдеуі шығады. Кері тұжырымдаманың дәлелдемесі [25]-тегі 5 теореманың дәлелдемесіне ұқсас.

Мысал. K - операторы формула арқылы анықталған 2.4 теоремасынан болсын,

$$(K\bar{F})_j(x_j) = \sum_{s=1}^r d_{js}(x_j, t_s) f_s(t_s) dt_s.$$

Онда қисынды тарылу $\Lambda_K \subset \Lambda_{\max}$ шекаралық есепке сәйкес келеді, яғни оның анықталу облысы келесі шекаралық шарттармен беріледі.

$$D(\Lambda_K) = \{ \bar{Y} \in D(\Lambda_{\max}) : U_j(\bar{Y}) = 0, j = 1, \dots, p+1 \}$$

мұнда $U_1(\cdot), \dots, U_{p+1}(\cdot)$ - қандай да бір скаляр коэффициенттері бар (2.8) формуласымен анықталған шекаралық формалар.

М. Отелбаевтың ұсынылып отырған қисынды тарылуларды сипаттауға арналған схемасы [25, 26] жұмыстарындағы дербес туындылы теңдеулерге қолданылды.

3 ШЕКАРАЛЫҚ БЕКІТІЛҮДІ БІРМӘНДІ ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУДЕ МЕНШІКТІ ЖИІЛІКТІҢ МИНИМАЛДЫ САНЫН АНЫҚТАУ. ҚОСЫМША МЫСАЛДАР

Бұл тарауда практикалық есептер қарастырылады. Техникалық диагностикалаудың маңызды бөлігі механизмдердің шуылына негізделген. Резонанс режиміндегі механизмнің қандай да бір тербелістерінің меншікті характеристикалары акустикалық диагностикамен анықталады. Модельдік жағдай (ситуация) ретінде ұштары бекітілген шарттары бойынша берілген сырық таңдап алынды. Мынадай модельдік жағдай қарастырылады: белгіленген көпірде бірнеше жүк тиелген автокөліктер тұр. Олардың сырықтың, яғни көпірдің, иілу тербелістерінің жиіліктеріне әсері қандай? Осыған ұқсас проблемалар [39],[40],[41],[42] жұмыстарында зерттелді. Келесі жұмыста [43] иілу тербелісінің екі жиіліктері арқылы жүктің шамасы мен орналасу координаттарын қалпына келтіру әдісі ұсынылды. Ұсынылып отырған [40], [41] жұмыстарындағы әдістерден өзгешеленеді.

Сонымен, қолданбалы маңызы мен теориялық маңыздылығын ескере отырып, құбырдың және оны әр түрлі жағдайда толтыратын сұйықтықтың бірлескен қозғалысы проблемаларының өзектілігі сөзсіз. Осындай зерттеулерді М.А.Илгамовтың [44] және Дж. Томсон [45] еңбектерінен де кездестіруге болады. «Сұйық және газ бар серпімді қабықшалардың тербелісі». А.М.Ахтямовтың [46, 47] еңбегінде сұйықтықтың қозғалмайтындығы қарастырылған.

Келесі жұмыста [48] ағынды сұйықтықпен құбырдың тікелей және иілу деформациясы бар жағдайларды қарастыру ұсынылады. Сондай-ақ, құбырлар тегіс емес жерге төселген. [49] жұмысында сырықтың бойлық тербелісінің теңдеуіндегі функциясын жиіліктерін екі ақырлы жиынтық бойынша қалпына келтірілді. Ұсынылып отырған алгоритм Шур алгоритмін қолданбайды. Сандық көрнекі мысалдар келтірілді. Құбырдың орнықтылығы [50] жұмысында аз шамадағы көлденең ауытқуының дифференциалдық теңдеуінің сандық шешемін MAPLE программалық пакетінде таптым.

Бұл тараудың жаңа аспектісі – шекаралық бекітілуді бірімәнді қалпына келтіруде меншікті жиіліктің минималды саны анықталынады. Қосымша мысал келтіріледі. Көпірдің бүйір бетіне соғатын желдің критикалық жылдамдығына әсер ететін шамалар анықталады. Қисайған құбырдың ішкі қысымы табылады және меншікті жиіліктерін табу алгоритмі ұсынылады. Құбырдың шеттерінің бекітілулері 5 жиілікпен бір мәнді анықталатындығы көрсетіледі.

3.1 Көпірдің критикалық жылдамдығы

Семей қаласындағы көпір - бұл Қазақстанның Семей қаласындағы Ертіс арқылы өтетін жер сілкінісіне төзімді аспалы көпір.



5-сурет Семей қаласындағы көпір

Платформа тіреулермен бікітілген. Тіреулер арасы тросттарен байланған және платформа жоғарыданда тростпен байланған. Платформа ұзындығы басқа өлшемдерінен көп үлкен.

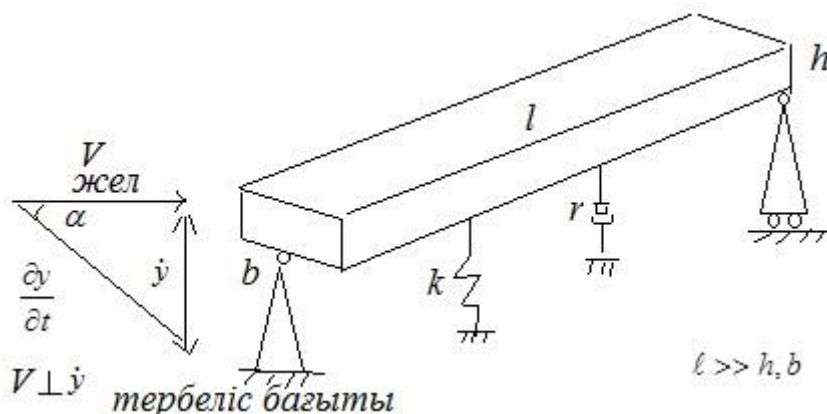
Енді бүйірінен соғатын желдің көпірге әсерін қарастырайық. Өткен тарихта жел әсерінен көпірдің құлау жағдайлары болған. Оның себебі, жел жылдамдығы критикалық жылдамдыққа жеткенде, платформа тербелісінің амплитудасы шексіз өседі де, көпірде ақау пайда болады. Тіпті құлауыда мүмкін.

Серпімді, иілетін конструкцияға соғатын бір қалыпты желді қарастырайық. Ол амплитудасы жоғары тербелістерді тудыруы мүмкін. Осындай жоғары амплитудалы тербелістер қирау алдында тұрған аспалы Такома Нэрроуз көпірінде келтірілген [45].

Мысалы, сертпе мен амортизатор арқылы вертикал жазықтыққа қозғалып отыратын қимасы тіктөртбұрыш болатын призманы қарастырайық. Вертикалық бағыттағы ауытқуды уақытқа байланысты y өсі болсын. Призмаға жылдамдығы V болатын жел соғып тұр. Призма y жылдамдықпен төмен қарай қозғалғанда, үшбұрыштар жылдамдығында көрсетілгендей призмаға қатысты желдің жылдамдығы v_R болады. Осы салыстырмалы жел күшінің вертикал компонентін туғызады. Квазистатикалық жуықтауда өз кезегінде y ден тәуелді S күшінің коэффициенті α бұрышына тәуелді. Төмендегі диаграммада S ның α дан тәуелділігінің әдеттегі екі түрі көрсетілген. Бұл тәуелділіктерді Паркинсон мен Брукс стационар иілген профилдердің аэродинамикалық тәжірибесі кезінде алған.

Жел теріс демпфрлеуге әкелетінін көреміз, сондай-ақ, тұрақты r амортизаторға пропорционал желдің жылдамдығы кезінде Хопс динамикалық бифуркациясы түріндегі орнықсыздықты туғызады. Демпфр болмаған жағдайда жүйе қандайда әлсіз соққан желдің әсерінен көпірге ақау пайда болуы мүмкін. Бұл консервативті жүйенің құрлымдық орнықсыздығын көрсетеді.

Бұл мәселені қарастыру үшін, платформаның қарапайым сызбасын салып, зерттеп көрсек. Тростты сертпемен, демпфермен алмастырайық. Платформаны призма ретінде қарастырайық. Призманың өлшемдерін былай белгілейік. l - платформа ұзындығы, h - платформа қалыңдығы, b - платформаның ені. Платформаның ұзындығы, ені мен қалыңдығынан көп ұзын $l \gg h, b$ болғандықтан, көпірді сырық ретінде қарастыруымызға әбден болады.



6-сурет. Платформаға желдің әсері

Жел платформаның бүйір бетінен тұрақты V - жылдамдықпен соғады. Платформаның өзі жоғары-төмен тік бағытта тербеледі. Платформаның төмен қарай \dot{y} жылдамдықпен қозғалғанда, онда \vec{V}_R -деп жел жылдамдығының платформаға салыстыруын белгілейік. $tg\alpha = \frac{\dot{y}}{V}$. \vec{V}_R -ның күштердің тік компоненті келесі формуламен беріледі:

$$F_V = \frac{1}{2} \rho V^2 l h \cdot C(\alpha),$$

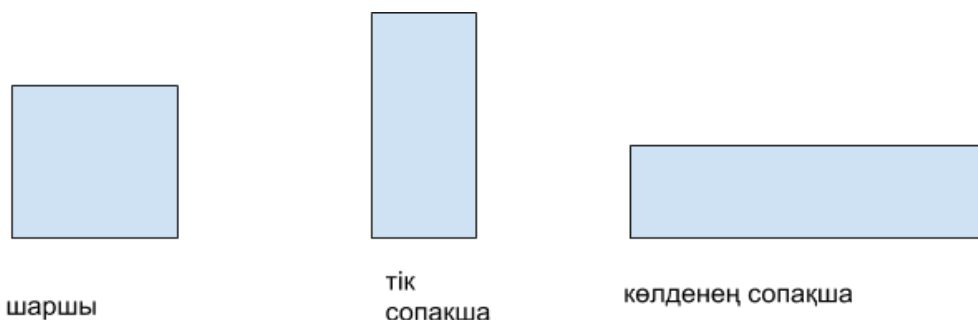
мұндағы ρ - ауа тығыздығы. V -жел жылдамдығы. $C(\alpha)$ - аэродинамикалық тәжірибелерден алынған коэффициент [51]

$C(\alpha) = A_1 \frac{\dot{y}}{V} - A_3 \left(\frac{\dot{y}}{V}\right)^3 + A_5 \left(\frac{\dot{y}}{V}\right)^5 - A_7 \left(\frac{\dot{y}}{V}\right)^7$ Бұл $C(\alpha)$ шама жылдамдықтардың қатынасына $tg\alpha = \frac{\dot{y}}{V}$ тәуелді. Нақтырақ айтсақ $C(\alpha)$ коэффициенті $tg\alpha = \frac{\dot{y}}{V}$ қатысты көп мүше. Ол көпүшеге аталған қатынастың тақ дәрежелері кіретіндігі [51] жұмыста көрсетілген.

$$C(\alpha) = A_1 tg\alpha - A_2 tg^3\alpha + A_5 tg^5\alpha - A_7 tg^7\alpha$$

мұндағы A_1, A_2, A_5, A_7 -коэффициенттері аэродинамикалық тәжірибелерден платформаның қимасына тәуелді екенін анықтаған. үш түрлі қимада

қарастырылады. Көлденең сопақша болғанда желдің күші платформаға ең аз күшпен соғады.



7-сурет

Онда платформаның тік бағытынағы күштердің тепе-теңдік теңдеуі келесі формуламен беріледі

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 l h C(\alpha) \quad (3.1)$$

мұндағы $m\ddot{y}$ -инерциялық күш, $r\dot{y}$ -демпфер күші, Ky -Серпімділік күші., $\frac{1}{2} \rho V^2 l h C(\alpha)$ -жел күшінің вертикал компоненті туғызатын күш. Көпір үш өлшемді еді. Бұл (6.17) теңдік уақытқа t байланысты екінші ретті сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеу. Яғни бір өлшемді теңдеу, одан y тің t ға тәуелді ауытқуын табамыз.

Алдымен $C(\alpha)$ -тің бірінші дәрежелі мүшесін ескерейік. $A_1 \tan \alpha$ ны (3.1). теңдеудегі $C(\alpha)$ ның орнына қоямыз. Ол кезде теңдеу келесі түрге өзгереді.

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 l h A_1 \tan \alpha$$

мұндағы $\tan \alpha = \frac{\dot{y}}{V}$ екені белгілі, онда теңдеуіміз төмендегідей болады:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky &= \frac{1}{2} \rho V^2 l h A_1 \frac{\dot{y}}{V} \\ m\ddot{y} + r\dot{y} - \frac{1}{2} \rho V^2 l h A_1 \frac{\dot{y}}{V} + Ky &= 0 \\ m\ddot{y} + \left(r - \frac{1}{2} \rho V l h A_1 \right) \dot{y} + Ky &= 0 \end{aligned}$$

оң жағындағы \dot{y} алныдағы $(\frac{1}{2} \rho V l h \cdot A_1)$ демпфр коэффициентіне оқсайды.

$$F_\alpha = \frac{1}{2} \rho V^2 l h \cdot A_1 \frac{\dot{y}}{V} = \left(\frac{1}{2} \rho V l h \cdot A_1 \right) \cdot \dot{y} \quad (3.2)$$

Онда келесі шама $[r - \frac{1}{2}\rho V \ell h \cdot A_1]$ -маңызды екені көрінеді. Бұл шаманың таңбасы V -желдің жылдамдығына байланысты. Осы айырмды нөлге теңестіріп, теңдеуді түрлендірсек, онда $V^c = \frac{2r}{\rho \ell h \cdot A_1}$ шығады. Егер v^c -критикалық жылдамдық деп атасақ, онда

- 1) $0 < v < v^c$ болғанда тербеліс бірте-бірте өшеді.
- 2) $v > v^c$ болғанда тербеліс амплитудасы шексіз өседі.

Жоғарыда $C(\alpha)$ -нің бірінші дәрежелі мүшесін ғана пайдаланып желдің v^c -критикалық жылдамдығын есептедік. Енді толық мүшесін $C(\alpha) = A_1 \operatorname{tg} \alpha - A_2 \operatorname{tg}^3 \alpha + A_5 \operatorname{tg}^5 \alpha - A_7 \operatorname{tg}^7 \alpha$ пайдаланып желдің v^c -критикалық жылдамдығын есептейік.

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h (A_1 \operatorname{tg} \alpha - A_2 \operatorname{tg}^3 \alpha + A_5 \operatorname{tg}^5 \alpha - A_7 \operatorname{tg}^7 \alpha)$$

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h \left(A_1 \frac{\dot{y}}{V} - A_3 \left(\frac{\dot{y}}{V} \right)^3 + A_5 \left(\frac{\dot{y}}{V} \right)^5 - A_7 \left(\frac{\dot{y}}{V} \right)^7 \right)$$

Аэросерпимді осциллятордың қозғалыс теңдеуі келесі түрде болады:

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h C(\alpha)$$

$C(\alpha)$ тәжірибелік тәуелділік графигіне негізделе отырып, C коэффициентін $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{y}}{V}$ бойынша дәрежелік қатар түрінде көрсетеміз, бұдан алатын теңдеуіміз

$$m\ddot{y} + r\dot{y} + Ky = \frac{1}{2} \rho V^2 \ell h \left(A_1 \frac{\dot{y}}{V} - A_3 \left(\frac{\dot{y}}{V} \right)^3 + A_5 \left(\frac{\dot{y}}{V} \right)^5 - A_7 \left(\frac{\dot{y}}{V} \right)^7 \right)$$

Бұл жерде призманың көлденең қимасының симметриялығынан тек қана тақ дәрежелері жазылды. Коэффициенттің алдындағы оң және теріс таңбалары келісу мәселесі болып табылады және келтірілген жазба квадрат призманың барлық A_i коэффициенттері үшін оң болатынына кепілдік береді.

Бұл теңдеуді линеаризациялау кезінде C қатарының тек алғашқы мүшесін сақтап қойған жөн, сонда \dot{y} кезінде нәтиже беруші коэффициент $r - \frac{1}{2} \rho V^2 a(A_1/V)$ тең болады. Біздің квадрат призмамыздың A_1 оң болған кезде $V^c = \frac{2r}{\rho \ell h \cdot A_1}$ тең болатын желдің критикалық жылдамдығы кезінде бұл нәтиже беруші демпфрлеу жоғалып кетеді.

Осылайша, кез-келген бастапқы аз ауытқулар үшін v^c кіші V мәндерінде алғашқы бұзылу өше бастайды, бірақ v^c дан үлкен болатын болса тербелістің экспоненциалды өсуін туғызатын демпфрлеудің қосындысының мәнінің терістігіне (аз бұзылулар өсе бастайды. Бұдан шығатыны, кез келген V үшін орынды болатын $y = 0$ тривиалды тепе - теңдік шешімі желдің v^c критикалық жылдамдығы кезінде орнықсыз болып келеді.

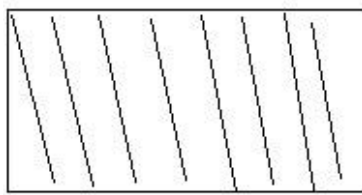
Бұл критикалық жылдамдықтан жоғары болатын болса сызықты теория тербелістің шектеусіз экспоненциалды өсуін болжайды, шындығында да C қатарының жіктелуінен жоғары мүшелері ақырлы амплитуданың шекті циклының пайда болуына әкеледі. V мәні v^c мәніне өткен кезде шекті циклдің өлшемі нөлден бастап өсе бастайды.

$C(\alpha)$ аэродинамикалық қарсыласу коэффициентінің кейбір жағдайлар үшін эксперимент арқылы Новак [97] тапқан. Новак жұмысының [97] нәтижесін талқыласақ келесі қортындыларды айтуға болады. 9-суретте көпірдің қимасы тік төртбұрышты көлденең сопақша болғандағы жағдай келтірілген. Бұл жағдайда сәйкес $C(\alpha)$ аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті келесі формуламен анықталады:

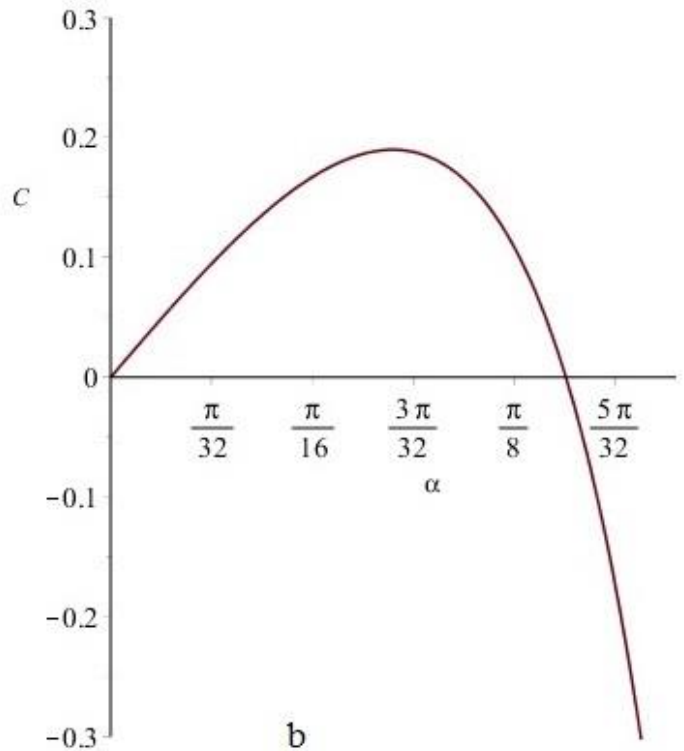
$$C(\alpha) = K(tg\alpha - 4tg^3\alpha - tg^5\alpha - 4tg^7\alpha).$$

Бұл формула аэродинамикалық құбырда жасалған тәжірибелерден алынған және оның графигі 9-суретте көрсетілген. 9-суретте байқағанымыздай $C(\alpha)$ коэффициенті α бұрышымен $\left(0, \frac{3\pi}{32}\right)$ интервалында бірге өседі және дөңес функция, ал α бұрышы $\left(\frac{3\pi}{32}, \frac{5\pi}{32}\right)$ интервалында бірге кемиді және дөңес функция.

```
> restart
> with(plots) :
> A1 := 1 :
> A2 := 4 :
> A3 := 1 :
> A4 := 4 :
> C := alpha -> A1*tan(alpha) - A2*(tan(alpha))^3 - A3*(tan(alpha))^5 - A4*(tan(alpha))^7 :
> plot(C(alpha), alpha = 0 .. 0.2 * pi, C = -0.3 .. 0.3)
```



a



b

9-сурет. а-көлденең сопақша призма, б- у тербелісінің амплитудасы графигі.

Екінші жағдайда, 10-суретте көпірдің қимасы квадрат болғандағы жағдай келтірілген. Бұл жағдайда сәйкес $C(\alpha)$ аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті келесі формуламен анықталады.

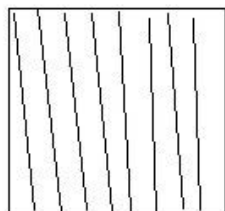
$$C(\alpha) = K(2tg\alpha + 80tg^3\alpha + 300tg^5\alpha - 800tg^7\alpha)$$

Бұл формула аэродинамикалық құбырда жасалған тәжірибелерден алынған және оның графигі 10-суретте көрсетілген. 10-суретте байқағанымыздай $C(\alpha)$ коэффициенті α бұрышымен $\left(0, \frac{5\pi}{32}\right)$ интервалында бірге өседі және ойыс функция, ал α бұрышы $\left(\frac{3\pi}{32}, \frac{3\pi}{16}\right)$ интервалында бірге кемиді және дөңес функция. Сонымен көпірдің қимасы квадрат болғандағы жағдайда $C(\alpha)$ аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті мүлде басқаша өзгереді, көпірдің қимасы көлденең сопақша болған жағдаймен салыстырғанда.

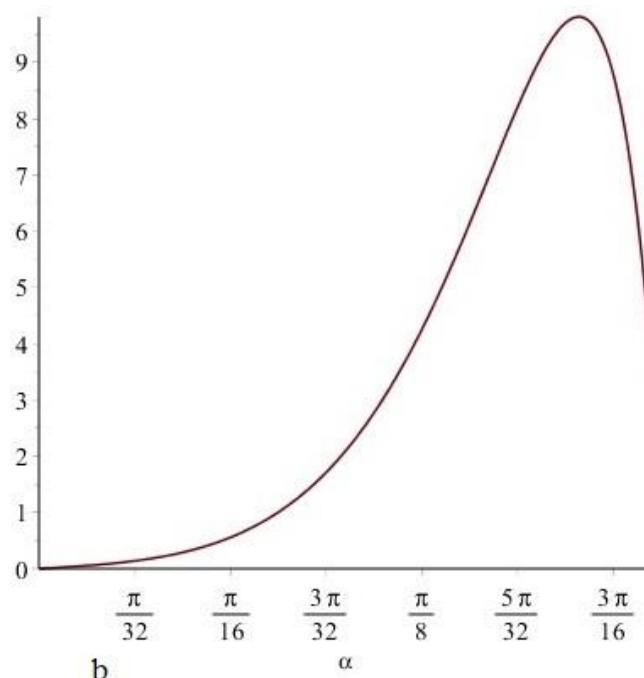
- > restart
- > with(plots) :
- > B1 := 1 :
- > B2 := -40 :
- > B3 := -150 :
- > B4 := 400 :
- > P := $\alpha \rightarrow B1 \cdot \tan(\alpha) - B2 \cdot (\tan(\alpha))^3 - B3 \cdot (\tan(\alpha))^5 - B4 \cdot (\tan(\alpha))^7$:

> $P1 := \text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0..0.2 \cdot \pi) :$

> $\text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0..0.2 \cdot \pi)$



a



10-сурет. а-квадрат призма, б- у тербеліс амплитудасы графигі.

Үшінші жағдайда, 11-суретте көпірдің қимасы тіктөртбұрышты тік сопақша болғандағы жағдай келтірілген. Бұл жағдайда сәйкес $C(\alpha)$ аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті келесі формуламен анықталады.

$$C(\alpha) = K(3tg\alpha - 12tg^3\alpha + 450tg^5\alpha + 12000tg^7\alpha).$$

Бұл формула аэродинамикалық құбырда жасалған тәжірибелерден алынған және оның графигі 11-суретте көрсетілген. 11-суретте байқағанымыздай $C(\alpha)$ коэффициенті α бұрышымен $\left(0, \frac{\pi}{16}\right)$ интервалында бірге кемиді, теріс мәндер

қабылдайды және ойыс функция, ал α бұрышы $\left(\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{32}\right)$ интервалында бірге өседі және ойыс функция. Бұл жағдайда $C(\alpha)$ аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті теріс мәндер қабылдайтынын байқадық. Осы аталған қасиеті алдындағы жағдайлармен салыстырғанда теріс мәндерімен ерекшеленеді.

> *restart*

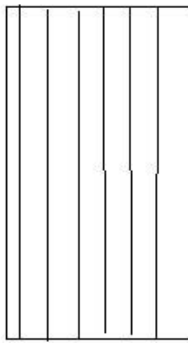
> *with(plots) :*

> $Q1 := -1 :$

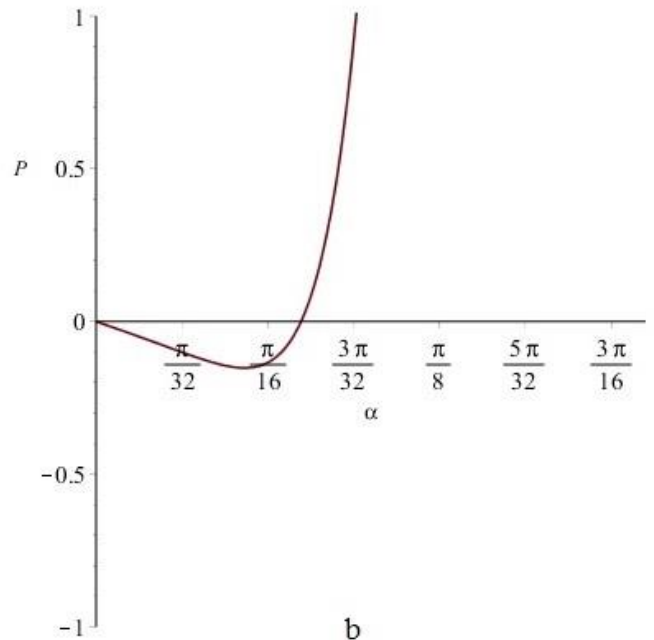
> $Q2 := 4 :$

> $Q3 := -150 :$

- > $Q4 := -4000$:
- > $P := \alpha \rightarrow Q1 \cdot \tan(\alpha) - Q2 \cdot (\tan(\alpha))^3 - Q3 \cdot (\tan(\alpha))^5 - Q4 \cdot (\tan(\alpha))^7$:
- > $P1 := \text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0 .. 0.2 \cdot \pi)$:
- > $\text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0 .. 0.1 \cdot \pi, P = -1 .. 1)$:
- > $\text{plot}(P(\alpha), \alpha = 0.0 \cdot \pi .. 0.2 \cdot \pi, P = -1 .. 1)$



a



b

11-сурет. а-тік сопақша призма, б- у тербеліс амплитудасы графигі.

Соңғы жағдайда $C(\alpha)$ аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті алдымен теріс болады. Бұл дегеніміз, динамикалық бифуркация жоқ екенін білдіреді. Быраздан кейін $C(\alpha)$ аэродинамикалық қарсыласу коэффициенті оң мәндер қабылдайды. Сондықтан үлкен ауытқулары бар шекті циклдар пайда болады. Паркинсон мен Смитке жұмысына [96] ілесе отырып, алдымен көпірдің қимасының квадрат болған жағдайды жіктеп талқылайық. Бұл жағдайда 9-суретте көрсетілгендей :

$$A_1 = 2, A_3 = -80, A_5 = -300, A_7 = 800.$$

Бұл коэффициенттер аэродинамикалық құбырда жасалған тәжірибелермен сәйкес келетінін алдында атап өткеміз. Сандық есептеу жүргізіу үшін алдымен біз өлшемсіз шамаларға өтейік.

Ол үшін жаңа айнымалылар енгізу арқылы

$$Y = y/h, \tau = \omega t, \omega^2 = k/m, U = V/(\omega h),$$

$$n = \rho h^2 l / (2m), \beta = r / (2m\omega)$$

қозғалыс теңдеуі келесі түрде жазылады

$$\ddot{Y} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{Y} + Y = n \cdot U^2 \cdot C(\alpha),$$

мұндағы нүкте τ бойынша туындысы екенін білдіреді. Бұл теңдеуді анығырақ келесі түрде жазамыз:

$$\ddot{Y} + Y = nA_1 \left\{ \left(U - \frac{2\beta}{nA_1} \right) \dot{Y} - \left(\frac{A_3}{A_1 U} \right) \dot{Y}^3 + \left(\frac{A_5}{A_1 U^3} \right) \dot{Y}^5 - \left(\frac{A_7}{A_1 U^5} \right) \dot{Y}^7 \right\}.$$

Мұндағы U параметрінің критикалық мәні $U^c = 2\beta/(nA_1)$ тең болады. қозғалыс теңдеуі келесі түрде жазамыз:

$$\ddot{Y} + Y = F(\dot{Y}).$$

Оны Крылов – Боголюбовтың бірінші жуықтауымен шешуге болады.

$$Y = A \cos(\tau + p).$$

Мұндағы A амплитудасы мен p фазасы τ уақыттық параметрдің баяу өзгеретін функциялары. Амплитуда мен фазаның баяу өзгеруі деп жуықталған теңдікті аламыз

$$\dot{Y} = -A \sin(\tau + p).$$

Қозғалыс теңдеуін \dot{Y} көбейтіп, алатынымыз

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (Y^2 + \dot{Y}^2) = \dot{Y} F(\dot{Y}),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} A^2 = -A \sin(\tau + p) F(-A \sin(\tau + p)).$$

Цикл периодын амплитудада өзгеріс болатын уақыт аралығымен салыстырғанда үлкен емес деп есептеп, оң жақ бөлігін цикл периоды бойынша орташасын аламыз

$$\frac{1}{2} \frac{dA^2}{d\tau} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \sin v F(-A \sin v) dv.$$

Соңғы өрнекті F үшін қойып және интегралдасақ, алатынымыз

$$\frac{dA^2}{d\tau} = nA \left\{ \left(U - \frac{2\beta}{n} \right) A^2 - \left(\frac{-40}{U} \right) A^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{-40}{U^3} \right) A^4 + \frac{5}{8} \left(\frac{-150}{U^3} \right) A^6 - \frac{35}{64} \left(\frac{400}{U^5} \right) A^8 \right\}.$$

Алынған қатынас жұмыс балансының сипатына ие екенін көреміз, мұнда энергияның артуы жылдамдыққа тәуелді жұмыс балансына теңестіріледі. p шамасы бұл талдауда жоқ екендігін байқап отырмыз, бірінші жуықтауда нөлге тең деп алынуы мүмкін.

Тұрақты амплитудасы бар шекті циклдің A^2 өзгеру жылдамдығын нөлге тең деп алуға болады, онда

$$\left(U - \frac{2\beta}{n}\right)A^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{-40}{U}\right)A^4 + \frac{5}{8}\left(\frac{-150}{U^3}\right)A^6 - \frac{35}{64}\left(\frac{400}{U^5}\right)A^8 = 0.$$

A^2 қысқартып және U^c үшін өрнекті қоятын болсақ, алатынымыз

$$U - U^c = \left(\frac{3(-40)}{4}\right)\frac{A^2}{U} - \left(\frac{5(-150)}{8}\right)\frac{A^4}{U^3} + \left(\frac{35 \cdot 400}{64}\right)\frac{A^8}{U^5},$$

Бұдан $U = U^c$ кезінде динамикалық бифуркация болатынын көреміз. Бірінші жуықтаудағы критикалық әрекеттер үшін

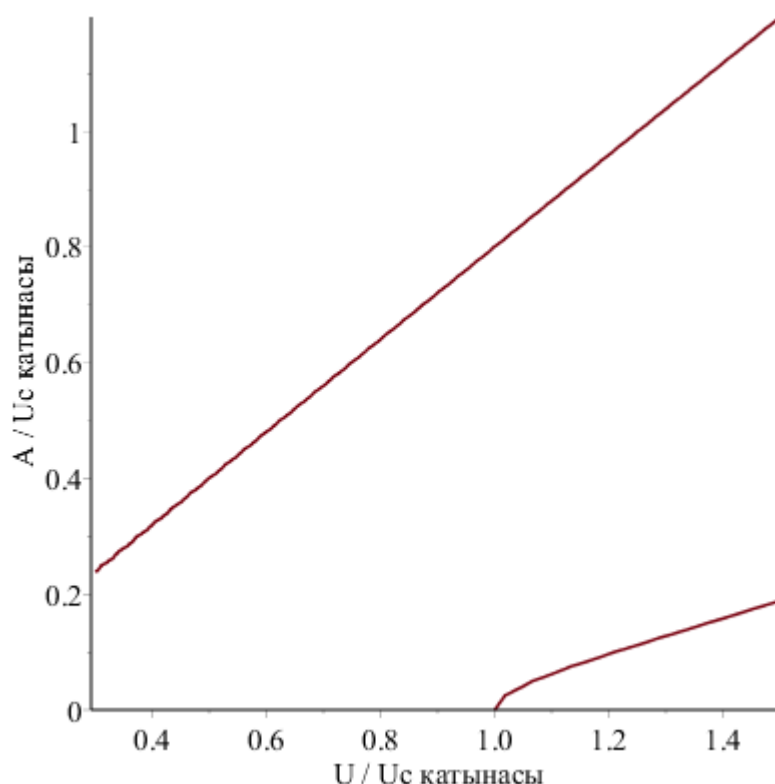
$$U - U^c = \left(\frac{3(-40)}{4}\right)\frac{A^2}{U^c}$$

Динамикалық бифуркация орнықты типтегі, U^c мәнінен өтіп U артқан сайын өсіп отыратын орнықты шекті циклі бар екендігі анық.

U бөліп, алатынымыз

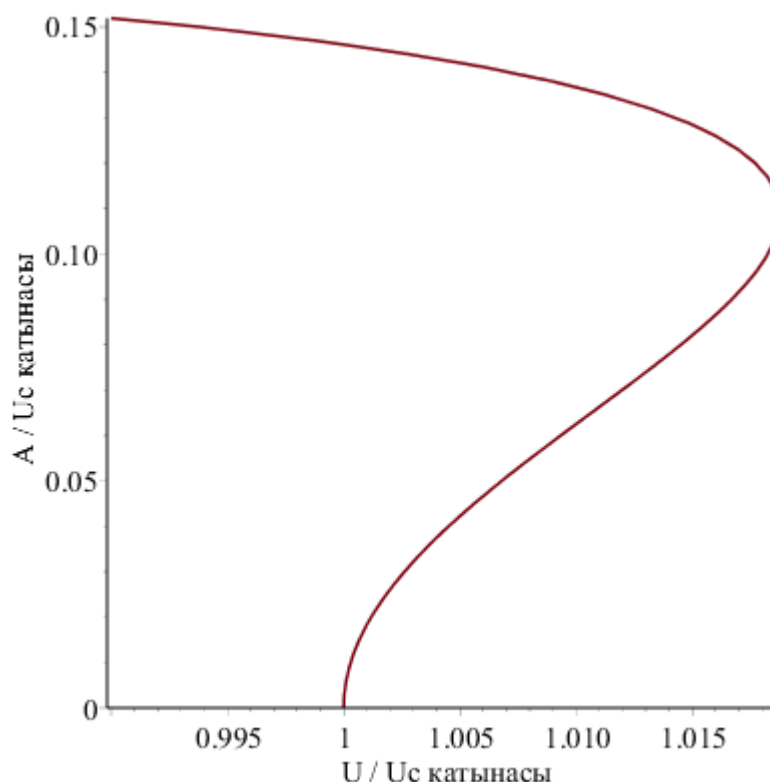
$$1 - \frac{U^c}{U} = \left(\frac{3 \cdot (-40)}{4}\right)\left(\frac{A}{U}\right)^2 - \left(\frac{5 \cdot (-150)}{8}\right)\left(\frac{A}{U}\right)^4 + \left(\frac{35 \cdot (400)}{64}\right)\left(\frac{A}{U}\right)^8$$

Бұдан, U шексіздікке ұмтылатынын, теңдеудің сол жақ бөлігі бірлікке ұмтылатынын байқаймыз, осыдан A/U қандай да бір тұрақты мәнге ұмтылу керек. Бұл дегеніміз A -ның U -дан тәуелділік графигі координата басынан өтетін асимптотаға ұмтылатынын білдіреді. Сондай-ақ A/U^c -ның U/U^c -дан тәуелділігін құратын болсақ, онда n және β тәуелді жалғыз қисық бар болады.



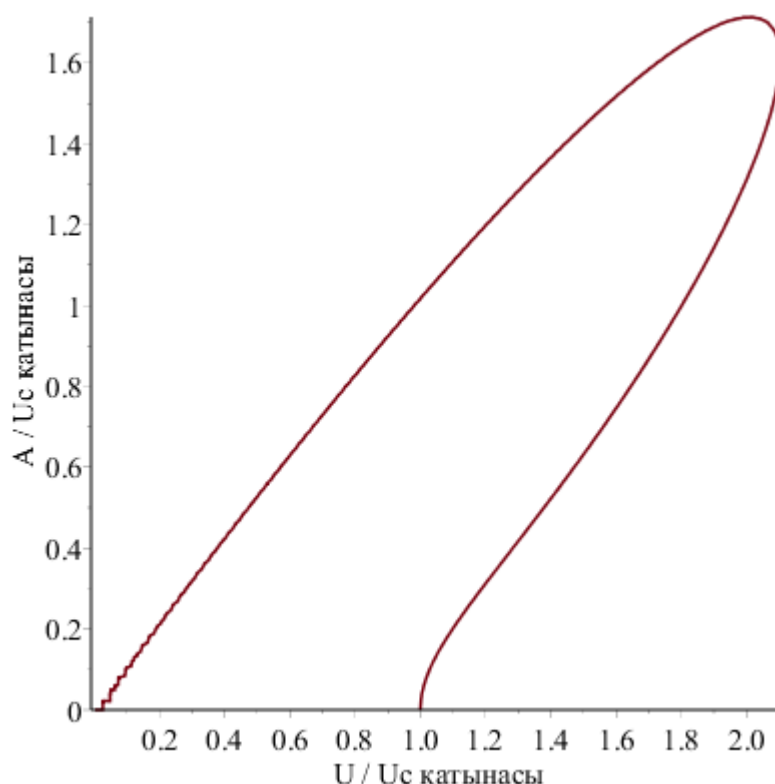
12-сурет. Көпір қимасы шаршы болғандағы U/U^c жылдамдық пен A/U^c амплитуда арасындағы тәуелділігі

12-суретте көпірдің қимасы шаршы формасы болғандағы, тербеліс жағдайындағы U/U^c жылдамдық пен A/U^c амплитуда арасындағы байланысы графигі көрсетілген. 12-суреттен байқағанымыздай жылдамдық $U/U^c \in (0;1)$ аралығында жатқанда мәні бір амплитудаға сәйкес келеді, ал $U/U^c \in (1;1.4)$ аралығында жылдамдыққа екі амплитуда сәйкес болады. Демек бұл жағдайда динамикалық бифуркация құбылысы байқалады. Мысалы, егер $U/U^c = 1.2$ болғанда амплитуда A/U^c алдымен $A/U^c = 0.1$ қабылдайды, одан кейін амплитуда бірден $A/U^c = 0.9$ мәніне секіреді. Сондықтан жылдамдық U/U^c бірден артық болса көпірді пайдалану қауыпты, себебі көпір бифуркация әсерінен қирауы мүмкін.



13-сурет. Көпір қимасы тік сопақша болғандағы U/U^c жылдамдық пен A/U^c амплитуда арасындағы тәуелділігі

13-суретте көпірдің тік сопақша формасы болғандағы, тербеліс жағдайындағы U/U^c жылдамдық пен A/U^c амплитуда арасындағы байланысы графигі көрсетілген. 13-суреттен байқағанымыздай жылдамдық $U/U^c \in (0;1)$ аралығында жатқанда мәні бір амплитудаға сәйкес келеді, ал $U/U^c \in (1;1.015)$ аралығында жылдамдыққа екі амплитуда сәйкес болады. Демек бұл жағдайда динамикалық бифуркация құбылысы байқалады. Мысалы, егер $U/U^c = 1.015$ болғанда амплитуда A/U^c алдымен $A/U^c = 0.05$ қабылдайды, одан кейін амплитуда бірден $A/U^c = 0.14$ мәніне секіреді. Сондықтан жылдамдық U/U^c бірден артық болса көпірді пайдалану қауыпты, себебі көпір бифуркация әсерінен қирауы мүмкін. 14-суретте көпірдің көлденең сопақша формасы болғандағы, тербеліс жағдайындағы U/U^c жылдамдық пен A/U^c амплитуда арасындағы байланысы графигі көрсетілген. 14-суреттен байқағанымыздай жылдамдық $U/U^c \in (0;1)$ аралығында жатқанда мәні бір амплитудаға сәйкес келеді, ал $U/U^c \in (1;2)$ аралығында жылдамдыққа екі амплитуда сәйкес болады.



14-сурет. Көпір қимасы көлденең сопақша болғандағы U/U^c жылдамдық пен A/U^c амплитуда арасындағы тәуелділігі

Демек бұл жағдайда динамикалық бифуркация құбылысы байқалады. Мысалы, егер $U/U^c = 1.2$ болғанда амплитуда A/U^c алдымен $A/U^c = 0.3$ қабылдайды, одан кейін амплитуда бірден $A/U^c = 1.3$ мәніне секіреді. Сондықтан жылдамдық U/U^c бірден артық болса көпірді пайдалану қауыпты, себебі көпір бифуркация әсерінен қирауы мүмкін.

Сонымен желдің жылдамдығы U критикалықтан $U^c = 2\beta/(nA_1)$ артық болғанда қолайсыз бифуркация құбылыстары пайда болады. Сондықтан ондай жағдайда көпірді пайдалану қауыпты. Қайсы қимаға тәуелді критикалық жылдамдық ең үлкен екенін төмендегі кестеден көрейік.

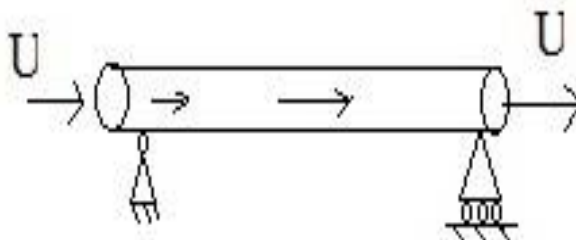
Қиманың формасы	Критикалық жылдамдық $U^c = 2\beta/(nA_1)$
шаршы	$A_1 = 2$
Тік сопақша	$A_1 = 12$
Көлденең сопақша	$A_1 = 1$

Кестеден байқағанымыздай, көпір қимасының үш түрлі формасын салыстыра отырып максималды критикалық жылдамдық көпірдің қимасы көлденең сопақша болған жағдайда, яғни $A_1 = 1$ болғанда екен.

3.2 Қисайған құбырдан сұйықтық аққан кездегі орнықтылық есебі

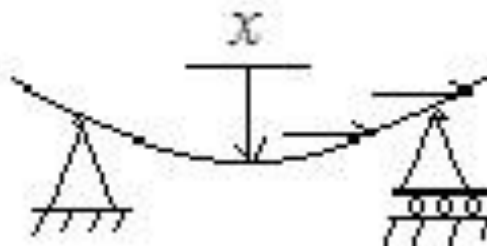
Бұл бөлімде пайдалануға берілген тасымал құбырларының екі шетінде ақау пайда болғанда, оны анықтау жолы ұсынылады. Әдетте, құбыр екі шеті ашық жерде орналасқанда тәжірибелі инженерлер ақауды оңай анықтайды. Кей жағдайларда құбырдың екі шеті жері астында немесе су астында болуы, инженерлер жұмысын қиындатады. Инженерлер тікелей бақылай алмаса, қосымша әдістер арқылы, мысалы сұйықтық аққан құбырдың дыбысын “естіу” арқылы, яғни акустикалық диагностикалау әдісі арқылы ақауды анықтайды. қазіргі кезде бұл өзекті мәселе.

Алдымен L ұзындықтағы, шеттері шарнерлі бекітілген 15-суретте көрсетілгендей құбырды қарастырайық. r -құбырдың сыртқы радиусы, r_1 -құбырдың ікші радиусы, айырымы $r - r_1$ құбырдың қалыңдығы, m -құбыр массасы, E - серпімділік модулі, J - инерция моменті деп белгілеп алайық.



15-сурет. Құбыр

Құбырда U жылдамдықпен сұйықтық ақсын. Оның массасы M - болсын. Сұйықтық ақпағандағы жылдамдықты $U = 0$ деп белгілейік. Құбырды пайдалану кезінде аз көлденең тербелістер пайда болады. Инженерлер балғамен құбырды ұру арқылы диагностикалайды. Біз осы кездегі жиіліктерін табайық. Алдымен құбырдың қозғалыс тепе-теңдік теңдеуін жазайық. 16-суретте құбырдың элементар бөлігінің сызбасы берілген.



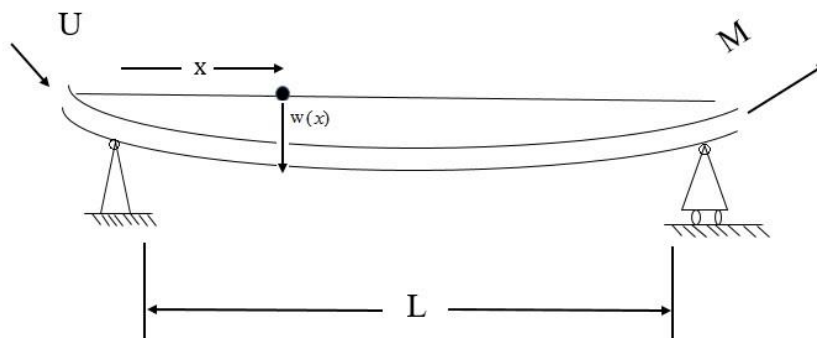
16-сурет құбырдың элементар бөлігі

$w(x)$ -құбырдың көлденең тербелісінің ауытқуы, мұндағы x -құбыр өсінің бойымен өзгертін айнмалы шама. Құбырдың элементар бөлігін қарастырайық, сұйық ақпаған $U = 0$ болған кезде келесі күштер әсер етеді:

$F_1 = (m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ -инерция күші, $F_2 = EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ -құбырдың серпімділік күші. Бұл жағдайда қозғалыс теңдеуі келесі түрде жазылады.

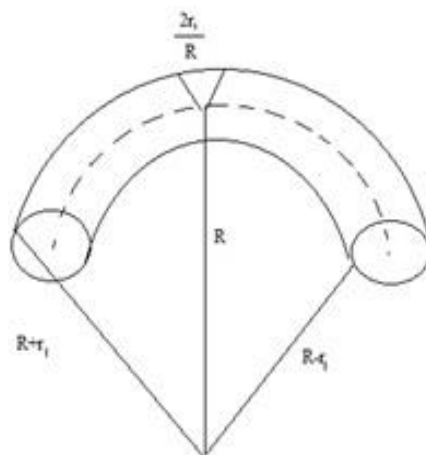
$$(m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (3.3)$$

Құбырда сұйықтық аққан жағдайда $U > 0$ (17-сурет), келесі күштер пайда болады:



17-сурет. Сұйықтық аққан құбыр

$F_1 = (m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ - инерция күші, $F_2 = EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ -құбырдың серпімділік күші. Келесі ескеретін жағдай, құбырдың қисайуы арқасында $F_3 = M \cdot 2 \cdot U \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$ -кориолиус күші және $F_4 = M \cdot \frac{U^2}{R} = MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ -центірден тепкіш күш пайда болады. Құбырға әсер ететін тағы бір күшті табу үшін құбырдың қисайған элементар бөлігін қарастырайық (18-сурет).



18-сурет. Құбырдың қисайған бөлігі

Құбыр қисайған кезде сыртқы бөлігі созылады сонымен қатар ішкі бөлігі сығылады, осы кезде сыртқы созылған артық ауданға түсетін күшті табайық. R -кисық құбырдың локалды радиусы, p_0 -критикалық ішкі қысым, r және r_1 -сыртқы және ішкі көлденең қиманың радиустары. Олай болса созылған артық ауданға келесі күш әсер етеді.

$$F_5 = \int_0^{\pi} p_0 \frac{2r_1^2}{R} 2 \cos^2 \beta d\beta = \frac{2p_0 r_1^2}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\beta) d\beta = -\frac{\pi r_1^2 p_0}{R} = \pi r_1^2 p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Бұл жағдайда қозғалыс теңдеуі келесі түрде жазылады.

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 0$$

Немесе

$$(m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \cdot 2 \cdot U \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi \cdot r_1^2 p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.4)$$

Және құбырдың шеттері шарнирлі бекітілгенін ескерсек, онда келесі шекаралық шарттарды жазамыз:

$$w(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad w(x, t) \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0.$$

Есептің қойылуы: құбырдың көлденең ауытқуын табу және құбырда ағып жатқан сұйықтықтың ішкі қысымы мен критикалық жылдамдығын есептеу. Басқаша айтқанда $w(x, t)$ – құбырдың көлденең ауытқуын және p_0 – сұйықтықтың ішкі қысымын табу есебі. Ескертіп кететін жағдай, p_0 – сұйықтықтың ішкі қысымын физикалық әдістермен өлшеу қиын. Осы бөлімде ұсынып отырған жаңалық, ол p_0 – сұйықтықтың ішкі қысымын табу әдісі.

Көлденең тербелістің екі түрлі сипаттамасы бар, ол жиілік пен амплитуда $w(x, t) = e^{i\omega t} W(x)$, мұндағы W – амплитуда, ω – жиілік. Олай болса осы түрде іздейік, (3.4) теңдеуге $w(x, t) = e^{i\omega t} W(x)$ өрнегін апарып қояйық, сонда амплитудаға қатысты келесі теңдеуге келеміз:

$$(m + M)(i\omega)^2 W(x) + EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + M \cdot 2 \cdot U(i\omega) \left(\frac{dW}{dx} \right) + MU^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad (3.5)$$

(3.4) дербес туындылы теңдеуі (3.5) жәй дифференциалдық теңдеуге айналады. Жиілік $\omega=0$ болғанда, (3.5) теңдеуі келесі түрге келеді:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + MU^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad (3.6)$$

Енді амплитуда үшін шекаралық шарттарды жазайық:

$$W(x)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad W(x)|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.7)$$

Сұйықтың массасы келесі формуламен табылады $M = \pi r_1^2 \rho_0$. Енді $\alpha^2 = \frac{\pi r_1^2 (p_0 + \rho_0 U^2)}{EJ}$ параметр енгізейік. Олай болса $\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$, бұдан

$$W(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x$$

Мұндағы C_1, C_2, C_3, C_4 – белгісіз тұрақтылар. (3.7) амплитуда үшін шекаралық шарттардан C_1, C_2, C_3, C_4 – белгісіз тұрақтыларды табамыз. Олай болса

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0 \quad \text{және} \quad \sin \alpha \cdot L = 0. \quad \text{Бұдан} \quad \alpha \cdot L = \pi \quad \text{немесе} \quad p_0 + \rho_0 U^2 = \frac{\pi \cdot E \cdot J}{r_1^2 L^2}.$$

Сонымен

$$p_0 = \frac{\pi \cdot E \cdot J}{r_1^2 L^2} - \rho_0 U^2$$

Сұйықтың ішкі қысымы осы формуламен анықталады және табылған өрнектің оң жағы теріс болмауы қажет. Сондықтан сұйықтың критикалық жылдамдығы $U_{кр}$ -жылдамдығы келесі теңдіктен табылады:

$$U_{кр}^2 = \frac{\pi \cdot E \cdot J}{r_1^2 L^2 \rho_0} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{M \cdot L^2}.$$

Қорытынды:

1. сұйықтықтың массасы көбейген сайын сұйықтың критикалық жылдамдығы азаяды;
2. құбырдың ұзындығы ұзарған сайын сұйықтықтың критикалық жылдамдығы азаяды;
3. сұйықтықтың ішкі қысымы критикалық жылдамдық артқан сайын азаяды.

3.3 Қисайған құбырдың сұйықтық аққан кездегі меншікті жиілігін есептеу

Қолданыстағы құбыр желілерін тексеретін инженерлер балғамен ұру немесе аққан сұйықтықтың дыбысын құлақпен есту арқылы ақауды анықтайды. Механикада бұл әдісті акустикалық диагностикалау деп атайды. Алдыңғы бөлімде құбырда ағып жатқан сұйықтықтың ішкі қысымы мен сұйықтықтың критикалық жылдамдығын таптық. Осы бөлімде құбырдың көлденең тербелістерінің меншікті жиіліктерін математикалық әдіспен табамыз. Бұл есептің математикалық атауы тура есеп. Құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктерін табу есебіне көшейік. Ол үшін өткен бөлімде қортып шығарған (3.4) қозғалыс теңдеуін жазып алайық:

$$(m + M)(i\omega)^2 w(x) + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \cdot 2 \cdot (i\omega) U \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Жиілік $\omega = 0$ болғанда, (3.5) теңдеуі келесі түрге келеді:

$$EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + MU^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$$

құбырдың шеттері шарнирлі бекітілгендіктен, төмендегі шекаралық шарттарды қанағаттандырады:

$$w(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad w(x, t) \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0.$$

Сұйықтың жылдамдығы $U_{кр}^2 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{M \cdot L^2}$ берілген, онда ішкі қысым осы

$p_0 = \frac{\pi \cdot E \cdot J}{r_1^2 L^2} - \rho_0 U^2$ формуламен табайық, осы формуланы алдыңғы бөлімде

қортып шығарғанбыз. Бұл бөлімдегі мақсатымыз құбырдың көлденең тербелістерінің меншікті жиіліктерін табу. Ол үшін $w(x, t)$ -көлденең ауытқуды келесі түрде іздейміз, ол W -амплитуда, ω -жиілікке тәуелді шама. Олай болса амплитуда мен жиілік арасында келесі теңдеу пайда болады:

$$(m + M)(i\omega)^2 W(x) + EJ \frac{d^4 W}{dx^4} + M \cdot 2 \cdot U(i\omega) \left(\frac{dW}{dx} \right) + MU^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \pi r_1^2 p_0 \frac{d^2 W}{dx^2} = 0$$

Амплитуда үшін келесі шекаралық шарттар орындалады:

$$W(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad W(x) \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0.$$

Жоғарыдағы теңдеу мен шекаралық шарттарын ескере отырып Бубнов – Галеркин әдісін пайдаланамыз. Бубнов – Галеркин әдісі бойынша базистік функцияларды келесі түрде таңдаймыз $\left\{ \sin \frac{\pi}{L}, \sin \frac{2\pi}{L}, \sin \frac{3\pi}{L}, \dots \right\}$ бұл гармоникалық функциялар жүйесі алдыңғы шекаралық шарттарды қанағаттандыратындайғып алынған. Олай болса $w(x,t)$ -көлденең ауытқуды Бубнов – Галеркин әдісі бойынша келесі қатар түрінде іздейміз.

$$W(x) = \sum_{s=1}^{\infty} D_s \sin \frac{s\pi}{L} x$$

Соңғы қатарды қозғалыс теңдеуіне апарып қойғанда, келесі түрге келеді

$$\begin{aligned} & (m+M)(i\omega)^2 \left\{ D_1 \sin \frac{\pi}{L} x + D_2 \sin \frac{2\pi}{L} x + D_3 \sin \frac{3\pi}{L} x \right\} + \\ & EJ \left\{ \frac{\pi^4}{L^4} D_1 \sin \frac{\pi}{L} x + 16 \frac{\pi^4}{L^4} D_2 \sin \frac{2\pi}{L} x + 81 \frac{\pi^4}{L^4} D_3 \sin \frac{3\pi}{L} x \right\} + \\ & M \cdot 2 \cdot U(i\omega) \left\{ \frac{\pi}{L} D_1 \cos \frac{\pi}{L} x + \frac{2\pi}{L} D_2 \cos \frac{2\pi}{L} x + \frac{3\pi}{L} D_3 \cos \frac{3\pi}{L} x \right\} + \\ & (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \left\{ -\frac{\pi^2}{L^2} D_1 \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{4\pi^2}{L^2} D_2 \sin \frac{2\pi}{L} x - \frac{9\pi^2}{L^2} D_3 \sin \frac{3\pi}{L} x \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

(3.8) теңдеудің екі жағында $\sin \frac{\pi}{L} x$ ке көбейтіп, одан кейін 0 ден L дейін интегралдайық. Сонымен келесі теңдеу шығады.

$$(m+M)(i\omega)^2 D_1 \frac{L}{2} + EJ \frac{\pi^4}{L^4} D_1 \frac{L}{2} - \frac{8}{3} M \cdot U(i\omega) D_2 - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{\pi^2}{L^2} D_1 \frac{L}{2} = 0.$$

(3.8) теңдеудің екі жағында $\sin \frac{2\pi}{L} x$ ке көбейтіп, одан кейін 0 ден L дейін интегралдайық. келесі теңдеу шығады.

$$(m+M)(i\omega)^2 D_2 \frac{L}{2} + EJ \cdot D_2 16 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{L}{2} - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{4\pi^2}{L^2} D_2 \frac{L}{2} + 2MUi\omega \left(\frac{\pi}{L} D_1 \frac{4L}{3\pi} - \frac{3\pi}{L} D_3 \frac{2L}{15\pi} \right) = 0$$

(3.8) теңдеудің екі жағында $\sin \frac{3\pi}{L} x$ ке көбейтіп, одан кейін 0 ден L дейін интегралдайық. Соңында төмендегі теңдеу шығады.

$$(m+M)(i\omega)^2 D_3 \frac{L}{2} + EJ \cdot 81 \cdot \frac{\pi^4}{L^4} D_3 \cdot \frac{L}{2} - 2 \cdot M \cdot U(i\omega) \frac{2\pi}{L} D_2 \frac{6L}{5\pi} - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{9\pi^2}{L^2} D_3 \frac{L}{2} = 0$$

Сонымен D_1 , D_2 , D_3 белгісіздерге қатысты сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі пайда болады.

$$\begin{cases} D_1 \left(-(m+M) \cdot \omega^2 \frac{L}{2} + EJ \frac{\pi^4}{2L^3} - (MU^2 + \pi r_1 p_0) \frac{\pi^2}{2L} \right) - \frac{8}{3} M \cdot U(i\omega) D_2 = 0 \\ D_2 \left((m+M)(i\omega)^2 \frac{L}{2} + 8 \cdot EJ \frac{\pi^4}{L^3} - \frac{2\pi^2}{L} \cdot (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \right) + \frac{8}{3} MU i \omega D_1 - \frac{4}{5} MU i \omega D_3 = 0 \\ D_3 \left((m+M)(i\omega)^2 \frac{L}{2} + EJ \cdot \frac{\pi^4}{L^3} \cdot \frac{81}{2} - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{9\pi^2}{2L} \right) - \frac{24}{5} M \cdot U(i\omega) D_2 = 0 \end{cases}$$

Олай болса сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері келесі анықтауыштың нольдері болып табылады.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

мұндағы

$$\begin{aligned} A_{11} &= -(m+M) \cdot \omega^2 \frac{L}{2} + EJ \frac{\pi^4}{2L^3} - (MU^2 + \pi r_1 p_0) \frac{\pi^2}{2L}, \quad A_{12} = -\frac{8}{3} M \cdot U(i\omega), \\ A_{21} &= \frac{8}{3} MU i \omega, \quad A_{22} = (m+M)(i\omega)^2 \frac{L}{2} + 8 \cdot EJ \frac{\pi^4}{L^3} - \frac{2\pi^2}{L} \cdot (MU^2 + \pi r_1^2 p_0), \quad A_{23} = -\frac{4}{5} MU i \omega, \\ A_{32} &= -\frac{24}{5} M \cdot U(i\omega), \quad A_{33} = (m+M)(i\omega)^2 \frac{L}{2} + EJ \cdot \frac{\pi^4}{L^3} \cdot \frac{81}{2} - (MU^2 + \pi r_1^2 p_0) \frac{9\pi^2}{2L} \end{aligned}$$

Анықтауыштың нольдерін Maple программалық пакеттің көмегімен табамыз. Сонымен сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктерін таптық. Математикалық әдіспен табу дәлдігі инженердің тыңдауы арқылы анықтауына қарағанда жоғары болады. Келесі бөлімде сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері арқылы құбыр ұштарының бекітілуін анықтаймыз.

3.4 Сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері арқылы құбыр ұштарының бекітілуін анықтау

Әдетте құбыр ұштары көзге көрінетін ашық жерде болмайды. Су астында немесе жерге көмілген болуы мүмкін. Осы себептерге байланысты инженерлерге сұйықтық ағып жатқан құбырдың көлденең тербелістерінің жиіліктері арқылы құбыр ұштарының бекітілуін анықтау кезінде қиындықтар туындайды. Осы жағдай жұмысты күрделендіреді. Ал математикалық әдіспен сұйықтық ағып жатқан құбырдың шеттерінің бекітілуін есептеулер арқылы осы қиындықтарды айналып өтуге болады. Мұндай әдісті математикада кері есеп деп атайды. Механикада акустикалық диагностикалау деп атайды. Алдыңғы бөлімдегі есепте ізделінді шамалар бұл жағдайда белгілі деп есептейміз. Сол белгілі шамалар арқылы құбырдың шеттерінің бекіту тәсілін табамыз. Құбыр шекарасының бекітілуін бір мәнді анықтау үшін қанша жиілік керек? Егер сол жиіліктер белгілі болса, шекаралық бекітілуін анықтауға қай жиіліктері сәйкес келеді, осы алгоритімді ұсынамыз.

3.2 бөлімде құбырдың қозғалыс теңдеуін келесідей (3.4) жазғанбыз.

$$(m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + M \cdot 2 \cdot U \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \pi \cdot r_1^2 p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

алдыңғы бөлімде жиіліктерін тапқанмыз $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ жиілік, геометриялық және физикалық параметірлері белгілі болсын.

$$J = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4), \quad m = \pi (r^2 - r_1^2) \rho, \quad M = \pi r_1^2 \rho_0, \quad p_0 = E \left(\frac{\pi r_1}{2L} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{r}{r_1} \right)^4 - 1 \right)$$

бұл жерде J – құбырлық қиманың инерция моменті, EJ – құбырдың қатаңдығы, p_0 – ішкі критикалық қысым, m және M – құбыр ұзындығының бірлігіне келетін құбыр мен сұйықтық массасы, r және r_1 – көлденең қиманың ішкі және сыртқы қимасы, U – сұйықтықтың қозғалу жылдамдығы, ρ – құбыр материалының тығыздығы, ρ_0 – сұйықтық тығыздығы, L – құбыр ұзындығы.

Осы бөлімдегі мақсатымыз құбырдың шекаралық бекітілуін табу. Бізге жиілік белгілі. Енді осы шамалар арқылы шекаралық бекітілулерді тамабыз, бұл әдісті математикада кері есеп деп атайды.

(3.4) теңдеуді $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$ қою арқылы, мына теңдеуге келеміз

$$W^{(4)} + aW'' + 2biwW' - cw^2W = 0 \tag{3.9}$$

мұнда $a = \frac{ML^2}{EJ} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right)$, $b = \frac{2MUL^3}{EJ}$, $c = \frac{(m + M)L^4}{EJ}$:

жоғарыдағы (3.9) теңдеуінің сызықты тәуелсіз шешімдері мына функциялар болады,

$$W_k = W_k(x, w) = e^{\lambda_k x}, \quad k = \overline{1,4}, \text{ мұндағы } \lambda_k = \lambda_k(w)$$

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + 2bi\lambda - c = 0,$$

характеристикалық теңдеуінің түбірлерін әр түрлі деп болжаймыз.

Құбырдың еркін тербелісінің спектралды есебін қою үшін шектік шарттарын беру керек. Құбырдың иілу тербелістерін қарастырылып жатқандықтан, онда сәйкес есептің шектік шарттары сырықтың еркін иілу шарттарына ұқсас болады. Жалпы жағдайда, - қадалған үш (заделка, қатаң бекітіліс), еркін тіреу, еркін ұшы, плавающая заделка, серпімді бекітілудің әртүрлі түрлерін ескеретін шектік шарттар келесі түрде болады [6,65]:

$$\begin{aligned} U_1(W) &= -a_1 W(0) + a_4 W'''(0) = 0, \\ U_2(W) &= a_2 W'(0) + a_3 W''(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} U_3(W) &= b_1 W(1) + b_4 W'''(1) = 0, \\ U_4(W) &= b_2 W'(1) + b_3 W''(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Характеристикалық анықтауышты нөлге теңестіру шартынан жиіліктер теңдеуін аламыз [65]

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} U_1(X_1) & U_1(X_2) & U_1(X_3) & U_1(X_4) \\ U_2(X_1) & U_2(X_2) & U_2(X_3) & U_2(X_4) \\ U_3(X_1) & U_3(X_2) & U_3(X_3) & U_3(X_4) \\ U_4(X_1) & U_4(X_2) & U_4(X_3) & U_4(X_4) \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Характеристикалық анықтауыштың түбірлерін жуықтап шешудің кебір әдістері [94] берілген.

Кері есеп

$U_1(W_k)$ және $U_2(W_k)$ формаларының a_j коэффициенттерінен құралған матрицаны A әрпімен, ал $U_3(W_k)$ және $U_4(W_k)$ формаларының b_j коэффициенттерінен құралған матрицаны B әрпімен белгілейміз.

$$A = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

A және B матрицаларының i -ші және j -ші бағандарынан құралған екінші ретті минорларды қысқаша A_{ij} және B_{ij} деп белгілейміз.

Сондықтан біздің мақсатымыз барлық a_j және b_j коэффициенттерінің дәл анықталуы емес. Мақсат – шектік шарттарды іздеу, бұл дегеніміз мына векторларда құрылған

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_1, 0, 0, a_4)^T, & a_2 &= (0, a_2, a_3, 0)^T, \\ b_1 &= (b_1, 0, 0, b_4)^T & b_2 &= (0, b_2, b_3, 0)^T. \end{aligned}$$

$\langle a_1, a_2 \rangle$ және $\langle b_1, b_2 \rangle$ сызықты қабықшаларын табумен бірдей.

(3.9)-(3.11) есептер турасында (3.10)-(3.11) шектік шарттарын қалпына келтіру кері есебі түрде жазылады.

Кері есеп. (3.9)-(3.11) есебіндегі $U_i(W_m)$ формаларының ($i, j, m = \overline{1,4}$) a_j және b_j коэффициенттері белгісіз. Осы коэффициенттерден құрылған A және B матрицаларының рангтері екіге тең. (3.9)-(3.11) есебінің w_k меншікті мәндері белгілі. $\langle a_1, a_2 \rangle$ және $\langle b_1, b_2 \rangle$ сызықты қабықшаларын қалпына келтіру қажет.

Төменде w_j - меншікті мәні нақты деп ойлаймыз. (яғни w_j меншікті мәндері меншікті жиіліктермен сәйкесіп қалады). Егер, w_j нақты болмаса, шектік шарттарды іздеу кезінде құбыр тербелісінің меншікті жиіліктерінен бөлек демпфрлеу коэффициенттері белгілі болады (яғни, меншікті мәндердің жорамал бөліктері)[65, с.91,93].

Кері есептің шешімін іздеу үшін келесі белгілеулерді енгіземіз. A , B және екі нөлдік матрицалардан құралған матрицаны C арқылы белгілейміз:

$$C = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

C матрицасының элементтерін c_{ij} арқылы, ал k_1, k_2, k_3, k_4 нөмердегі бағандардан құралған минорларды

$$M_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \begin{vmatrix} c_1 k_1 & c_1 k_2 & c_1 k_3 & c_1 k_4 \\ c_2 k_1 & c_2 k_2 & c_2 k_3 & c_2 k_4 \\ c_3 k_1 & c_3 k_2 & c_3 k_3 & c_3 k_4 \\ c_4 k_1 & c_4 k_2 & c_4 k_3 & c_4 k_4 \end{vmatrix},$$

(3.10) мен (3.11) шектік шарттарындағы белгілеулер мына түрде жазылады

$$U_i(W_m) = \sum_{j=1}^4 [c_{ij} W_m^{(j-1)}(0) + c_{i,4+j} W_m^{(j-1)}(1)], \quad i = \overline{1,4} \quad (3.15)$$

жаңа белгілеулердегі кері есеп келесі түрде болады: (3.9), (3.15) есептерінің c_{ij} коэффициенттері белгісіз; осы коэффициенттерден құралған C матрицасының рангісі 4 ке тең. A , B матрицаларынан құралған C матрицасының $A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23}$ минорлары нөлге тең. (3.9), (3.15) есептерінің w_k меншікті мәндері белгілі. $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}, c_{i5}, c_{i6}, c_{i7}, c_{i8})^T$ ($i = \overline{1,4}$) векторларында құрылған $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ сызықты қабықшаны қалпына келтіру қажет.

$\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle$ сызықты қабықшаны іздеу сызықты эквиваленттілік дәлдігіне дейінгі C матрицасын іздеумен бірдей.

Қойылған кері есебіміздің бір немесе екі шешімі бар екенін көрсетейік.

(3.15) формаларынан бөлек келесі сызықты біртекті формаларды қарастырайық:

$$\tilde{U}_i(W_m) = \sum_{j=1}^4 [\tilde{c}_{ij} W_m^{(j-1)}(0) + \tilde{c}_{i,4+j} W_m^{(j-1)}(1)] \quad i = \overline{1,4} \quad (3.16)$$

\tilde{c}_{ij} коэффициенттерінен құралған матрицаны \tilde{C} арқылы, ал оның минорларын - $\tilde{M}_{k_1 k_2 k_3 k_4}$, екінші ретті минорларын - $\tilde{A}_{k_1 k_2}$, $\tilde{B}_{k_{31}-4k_4-4}$. белгілейміз.

Сондай-ақ келесі векторларды енгіземіз:

$$c_i^+ = (\tilde{c}_{i1}, \tilde{c}_{i2}, \tilde{c}_{i3}, \tilde{c}_{i4}, \tilde{c}_{i5}, \tilde{c}_{i6}, \tilde{c}_{i7}, \tilde{c}_{i8})^T,$$

$$c_i^- = (\tilde{c}_{i5}, \tilde{c}_{i6}, -\tilde{c}_{i7}, -\tilde{c}_{i8}, \tilde{c}_{i1}, \tilde{c}_{i2}, -\tilde{c}_{i3}, -\tilde{c}_{i4})^T, \quad i = \overline{1,4}.$$

Теорема 3.1. (кері есептің шешімінің жалғыздығы немесе екіжақтылығы). $rank C = rank \tilde{C} = 4$ болсын. (3.9), (3.15) есептерінің $\{\omega_k\}$ меншікті мәні және (3.9), (3.16) есептерінің $\{\tilde{\omega}_k\}$ меншікті мәні еселіктеріне қарай сәйкесіп отырады, онда $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle c_1^+, c_2^+, c_3^+, c_4^+ \rangle$, болмаса $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle c_1^+, c_2^+, c_3^+, c_4^+ \rangle$ немесе $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle c_1^-, c_2^-, c_3^-, c_4^- \rangle$.

Дәлелдеуі. (3.12) анықтауышын келесі түрде жазайық

$$\Delta(\omega) = \det(C \cdot D), \text{ МҰНДАҒЫ}$$

$$D = \begin{vmatrix} W_1(0) & W_2(0) & W_3(0) & W_4(0) \\ W_1'(0) & W_2'(0) & W_3'(0) & W_4'(0) \\ W_1''(0) & W_2''(0) & W_3''(0) & W_4''(0) \\ W_1'''(0) & W_2'''(0) & W_3'''(0) & W_4'''(0) \\ W_1(1) & W_2(1) & W_3(1) & W_4(1) \\ W_1'(1) & W_2'(1) & W_3'(1) & W_4'(1) \\ W_1''(1) & W_2''(1) & W_3''(1) & W_4''(1) \\ W_1'''(1) & W_2'''(1) & W_3'''(1) & W_4'''(1) \end{vmatrix}$$

Бине-Коши формуласын қолдана отырып, алатынымыз [104, 39 б.]

$$\Delta(\omega_k) = \sum_{\substack{1 \leq k_1 < k_2 \leq 4 \\ 5 \leq k_3 < k_4 \leq 8}} M_{k_1 k_2 k_3 k_4} f_{k_1 k_2 k_3 k_4} \quad (3.17)$$

мұндағы $f_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ - k_1, k_2, k_3, k_4 нөмердегі бағандардан құралған D матрицасының төртінші ретті минорлары.

$k_3, k_4 \leq 4$, $k_1, k_2 \geq 5$, кезінде $M_{k_1 k_2 k_3 k_4} = 0$ болғандықтан анықтауышты есептеу үшін Лаплас теоремасын қолдана отырып және $\Delta(w_k) = 0$ ескеріп, алатынымыз

$$\sum_{\substack{1 \leq k_1 < k_2 \leq 4 \\ 5 \leq k_3 < k_4 \leq 8}} M_{k_1 k_2 k_3 k_4} f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(w_k) = 0. \quad (3.18)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} M_{k_1 k_2 k_3 k_4} &= A_{k_1, k_2} B_{k_3-4, k_4-4} \\ (A_{14} = A_{23} = B_{14} = B_{23} = 0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Сызықты дифференциалдық операторлардың жалпы теориясының қасиеттерінен $\Delta(w)$ функциясы $1/2$ ретті бүтін функция болып табылады [108]. Бұдан шығатыны, (3.9), (3.15) және (3.9), (3.16) есептерінің сәйкесінше $\Delta(w)$ және $\tilde{\Delta}(w)$ характеристикалық анықтауыштары мына қатынаспен байланысты

$$\Delta(\omega) \equiv K\tilde{\Delta}(\omega), \quad (3.20)$$

мұндағы K – нөлден өзгеше константа. (3.17) және (3.20) шығатыны

$$\begin{aligned} & [M_{1256} - K\tilde{M}_{1256}]f_{1256} + [M_{1257} - K\tilde{M}_{1257}]f_{1257} + [M_{1268} - K\tilde{M}_{1268}]f_{1268} + \\ & + [M_{1256} - K\tilde{M}_{1268}]f_{1268} + [M_{1278} - K\tilde{M}_{1278}]f_{1278} + [M_{1356} - K\tilde{M}_{1356}]f_{1356} + \\ & + [M_{1357} - K\tilde{M}_{1357}]f_{1357} + [M_{1368} - K\tilde{M}_{1368}]f_{1368} + [M_{1378} - K\tilde{M}_{1378}]f_{1378} + \\ & + [M_{2456} - K\tilde{M}_{2456}]f_{2456} + [M_{2457} - K\tilde{M}_{2457}]f_{2457} + [M_{2468} - K\tilde{M}_{2468}]f_{2468} + \\ & + [M_{2478} - K\tilde{M}_{2478}]f_{2478} + [M_{3456} - K\tilde{M}_{3456}]f_{3456} + [M_{3457} - K\tilde{M}_{3457}]f_{3457} + \\ & + [M_{3468} - K\tilde{M}_{3468}]f_{3468} + [M_{3478} - K\tilde{M}_{3478}]f_{3478} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Соңғы теңдіктің оң жақ бөліктері (осы $f_{1356} = -f_{1257}$ мүшесінен басқасы) сызықты тәуелсіз мүшені құрайды. Егер (3.9) теңдеуіндегі $b = 0$ болса, онда осы $f_{1356} = -f_{1257}$ теңдіктен басқа келесі теңдіктерді аламыз: $f_{1257} = -f_{1356}$, $f_{1268} = -f_{2456}$, $f_{1278} = f_{3456}$, $f_{1368} = f_{2457}$, $f_{1378} = -f_{3457}$, $f_{2478} = -f_{3468}$. Бұл жағдайда сызықты тәуелсіз функциялар жүйесін тек мына функциялар құрайды $f_{1256}(w_m)$, $f_{1257}(w_m)$, $f_{1268}(w)$, $f_{1278}(w)$, $f_{1357}(w)$, $f_{1368}(w)$, $f_{1378}(w)$, $f_{2468}(w)$, $f_{2478}(w)$, $f_{3478}(w)$.

Бұдан кері есептің шешімінің жалғыздығы немесе екі жақтылығы шығады.

$b = 0$ жағдайында меншікті жиіліктер бойынша құбырдың бекітілуін анықтау есебінің шешімі әр қашан екі жақты бола бермейді. $\langle c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle = \langle c_1^-, c_2^-, c_3^-, c_4^- \rangle$ кезінде (мысалы, қадалған үш-қадалған үш жағдайында) кері есептің жалғыз шешімін аламыз. Осылайша, кері есептің жалғыз немесе екі жақты шешімі болады. Теорема дәлелденді.

Құбырдың иілу тербелістерінің меншікті жиіліктері бойынша белгісіз шектің шарттарын іздеу есебінің шешімі жалғыз немесе екеу болатынын көрсеттік.

Сұйықтығы бар құбырдың шеттік бекітілулерін меншікті жиіліктері арқылы табуды екі жағдайға бөліп қарастырайық. Бірінші сұйықтың ақпаған $U = 0$ – жағдайды қарастырайық. (3.9) теңдеуіндегі $b = 0$ болсын және $\{\omega_k\}$ – құбырдың иілу тербелістерінің меншікті жиіліктері. Бұл жағдайда $\{\omega_k\}$ төмендегі жиіліктік теңдеуді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega_k) = & (M_{1257} - M_{1356})f_{1257}(\omega_k) + M_{1268}f_{1268}(\omega_k) + M_{2456}f_{2456}(\omega_k) + M_{1368}f_{1378}(\omega_k) + \\ & + M_{2457}f_{2457}(\omega_k) + M_{1278}f_{1278}(\omega_k) + M_{3456}f_{3456}(\omega_k) + M_{1378}f_{1378}(\omega_k) + M_{3457}f_{3457}(\omega_k) + \\ & + M_{2478}f_{2478}(\omega_k) + M_{3468}f_{3478}(\omega_k) + M_{1357}f_{1357}(\omega_k) + M_{2468}f_{2468}(\omega_k) + M_{1256}f_{1256}(\omega_k) + \\ & + M_{3478}f_{3478}(\omega_k) = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\{\omega_k\}$ – (3.9), (3.14) есептеріндегі тек тоғыз меншікті жиіліктер болса, онда (3.22) теңдеуі 10 белгісіз x_1, x_2, \dots, x_n қатысты 9 сызықты алгебралық теңдеулерден тұратын жүйені құрайды:

$$\begin{aligned} \Delta(w_k) = & x_1 f_{1257}(w_k) + x_2 f_{1268}(w_k) + x_3 f_{1368}(w_k) + x_4 f_{1278}(w_k) + x_5 f_{1378}(w_k) + x_6 f_{2478}(w_k) + \\ & + x_7 f_{1357}(w_k) + x_8 f_{2468}(w_k) + x_9 f_{1256}(w_k) + x_{10} f_{3478}(w_k) = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} x_1 = M_{1257} - M_{1356} (f_{1257} = -f_{1356}), \quad x_5 = M_{1378} - M_{3457} (f_{1378} = -f_{3457}), \\ x_2 = M_{1268} - M_{2456} (f_{1268} = -f_{2456}), \quad x_6 = M_{2478} - M_{3468} (f_{2478} = -f_{3468}), \\ x_3 = M_{1368} - M_{2457} (f_{1368} = f_{2457}), \quad x_4 = M_{1278} - M_{3456} (f_{1278} = f_{3456}), \\ x_7 = M_{1357}, \quad x_8 = M_{2468}, \quad x_9 = M_{1256}, \quad x_{10} = M_{3478} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Егер $\text{rank} \|f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(\omega_k)\|_{10 \times 9} = 9$ болса, онда (3.23) алгебралық теңдеулер жүйесі x_1, x_2, \dots, x_{10} тұрақты көбейткіштеріне дейінгі дәлдікте жалғыз шешімі болады.

x_1, x_2, \dots, x_{10} мәндері бойынша (эквиваленттік дәлдікке дейінгі) бір немесе екі C матрицасы табылады. Бұл нақты мысалда қалай болатынын көрсетейік.

Мысал-1(еркін тіреу-қадалған үш). Дифференциалдық теңдеуді (3.25) қарастырайық

$$W^{(4)}(x) + W''(x) - w^2 W(x) = 0 \quad (b = 0). \quad (3.25)$$

(3.25), (3.10), (3.11) есептерінің ω_k тоғыз меншікті жиіліктері белгілі болсын:

$$\omega_1 = 14,65, \quad \omega_2 = 49,10, \quad \omega_3 = 103,34, \quad \omega_4 = 177,34, \quad \omega_5 = 271,09, \quad \omega_6 = 384,58, \quad \omega_7 = 670,79, \\ \omega_8 = 843,50, \quad \omega_9 = 1035,96.$$

Осыларға сәйкес болатын шектік шарттарды қанағаттандырайық. Maple программалық пакетінің көмегімен (3.23) жүйесінің шешімін аламыз:

$x_1 = K; x_i = 0, i = \overline{2,10}$. Бұдан ары қарай $K = const \neq 0$. $x_1 = M_{1257} - M_{1356} = K$ теңдігінен

$M_{1257} \neq 0$ немес $M_{1356} \neq 0$ (A және B матрицаларының рангтері нөлге тең болып қалатын еді, бұл ранг екіге тең болады дегенге қарама-қайшы келеді). Келесі жағдайларға сәйкес келетін C матрицасын табайық.

1. $M_{1257} \neq 0$ болсын. Онда $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, b_3 \neq 0$. Бұдан C матрицасының түрі келесідей болады(сызықты эквиваленттік дәлдікке дейінгі)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$M_{1357} = 0, M_{1356} = 0$ теңдіктерінен $a_3 = 0, b_2 = 0$ болады, ал $x_3 = M_{1368} + M_{2457} = 0, x_4 = M_{1278} + M_{3456} = 0$ теңдіктерінен $a_4 = 0, b_4 = 0$ болатынын аламыз. Бұдан C матрицасының түрі төмендегідей болады

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $M_{1356} \neq 0$ болсын. Дәл сол жағдаймен C матрицасының түрі келесідей болады

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Осылайша, теоремамен толық сәйкестікте екі шешімін (қадалған үш-еркін тіреу) және (еркін тіреу-қадалған үш) аламыз:

$$W(0) = 0, W'(0) = 0, W(1) = 0, W''(1) = 0;$$

$$W(0) = 0, W''(0) = 0, W(1) = 0, W'(1) = 0.$$

Мысал-2(серпімді бекітілу). 1-ші мысалдағыдай дифференциалдық теңдеуді (3.25) қарастырайық. (3.25), (3.10), (3.11) есептерінің ω_k тоғыз меншікті жиіліктері белгілі болсын:

$$\omega_1 = 21,67, \omega_2 = 60,87, \omega_3 = 120,06, \omega_4 = 198,98, \omega_5 = 297,66, \omega_6 = 416,08, \omega_7 = 712,15, \omega_8 = 889,79, \omega_9 = 1087,18.$$

Maple программалық пакетінің көмегімен (3.23) жүйесінің рангі 9 ға тең, ал оның шешімі:

$$x_5 = -3K, x_7 = K, x_{10} = -2K; \text{ қалған } x_i = 0 \quad (3.26).$$

$x_7 = M_{1257} \neq 0$ теңдігінен $a_1 \neq 0, a_3 \neq 0, b_1 \neq 0, b_3 \neq 0$ аламыз. Бұдан C матрицасының түрі келесідей болады(сызықты эквиваленттік дәлдікке дейінгі)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (K = 1).$$

Бұдан, (3.24) және (3.26) теңдіктерінен

$M_{1357} = 0, M_{1356} = 0$ теңдіктерінен $a_2 = 0, b_2 = 0, a_4 - b_4 = -3, a_4 b_4 = -2$. Бұдан $a_2 = 0, b_2 = 0, a_4 = -1, b_4 = 2$ немесе $a_2 = 0, b_2 = 0, a_4 = -2, b_4 = 1$ болады. Осылайша, C матрицасының түрі келесідей болады(сызықты эквиваленттік дәлдікке дейінгі)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{немесе} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Осыдан шектік шарттар келесідей болады:

$$\begin{aligned} W(0) - W'''(0) &= 0, & W''(0) &= 0, \\ W(1) + 2W'''(1) &= 0, & W''(1) &= 0, \end{aligned}$$

Немесе

$$\begin{aligned} W(0) - 2W'''(0) &= 0, & W''(0) &= 0, \\ W(1) + W'''(1) &= 0, & W''(1) &= 0. \end{aligned}$$

Екінші құбырдағы сұйықтың ағып жатқан $U \neq 0$ – жағдайды қарастырайық. $b \neq 0$ болсын және $\{\omega_k\}$ – құбырдың иілу тербелістерінің меншікті жиіліктері. Бұл жағдайда $\{\omega_k\}$ төмендегі (3.22) жиіліктік теңдеуді қанағаттандырады:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega_k) &= (M_{1257} - M_{1356})f_{1257}(\omega_k) + M_{1268}f_{1268}(\omega_k) + M_{2456}f_{2456}(\omega_k) + M_{1368}f_{1378}(\omega_k) + \\ &+ M_{2457}f_{2457}(\omega_k) + M_{1278}f_{1278}(\omega_k) + M_{3456}f_{3456}(\omega_k) + M_{1378}f_{1378}(\omega_k) + M_{3457}f_{3457}(\omega_k) + \\ &+ M_{2478}f_{2478}(\omega_k) + M_{3468}f_{3478}(\omega_k) + M_{1357}f_{1357}(\omega_k) + M_{2468}f_{2468}(\omega_k) + M_{1256}f_{1256}(\omega_k) + \\ &+ M_{3478}f_{3478}(\omega_k) = 0 \end{aligned}$$

$\{\omega_k\}$ – (3.9), (3.14) есептеріндегі 14 меншікті жиіліктер болса, онда (3.22) теңдеуі 15 белгісіз x_1, x_2, \dots, x_n қатысты 14 сызықты алгебралық теңдеулерден тұратын жүйені құрайды:

Егер $\text{rank} \|f_{k_1 k_2 k_3 k_4}(\omega_k)\|_{15 \times 14} = 14$ болса, онда сәйкес C матрицасының түріне қарай, осы матрицаны іздеуде бір немесе екі шешім табылады.

Мысал-3(еркін тіреу-қадалған ұш). Дифференциалдық теңдеуді қарастырайық

$$W^{(4)}(x) + W''(x) - 2iw^2W(x) - w^2W(x) = 0 \quad (b \neq 0). \quad (3.27)$$

(3.27), (3.10), (3.11) есептерінің ω_k 14 меншікті жиіліктері белгілі болсын:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 14,92, & \omega_2 &= 49,61, & \omega_3 &= 103,92, & \omega_4 &= 177,96, & \omega_5 &= 271,73, & \omega_6 &= 385,24, & \omega_7 &= 671,47, \\ \omega_8 &= 844,19, & \omega_9 &= 1036,65, & \omega_{10} &= 1248,85, & \omega_{11} &= 1480,79, & \omega_{12} &= 1732,46, & \omega_{13} &= 2003,88, \\ \omega_{14} &= 2295,03. \end{aligned}$$

Шектік шарттарын табайық. (3.22)-ден $M_{1257} - M_{1356} = K$ болатындай, ал қалған сол жақ 13 белгісіз көбейткіштері нөлге тең. Бұдан бірінші мысалдағыдай екі шешім (қадалған ұш-еркін тіреу) және (еркін тіреу-қадалған ұш) аламыз

$$\begin{aligned} W(0) &= 0, & W'(0) &= 0, & W(1) &= 0, & W''(1) &= 0; \\ W(0) &= 0, & W''(0) &= 0, & W(1) &= 0, & W'(1) &= 0. \end{aligned}$$

Мысал-4(серпімді бекітілу).3-ші мысалдағыдай (3.27) теңдеуін қарастырамыз. (3.27), (3.10), (3.11) есептерінің ω_k 14 меншікті жиіліктері белгілі болсын:

$$\omega_1 = 21,81, \quad \omega_2 = 61,32, \quad \omega_3 = 120,58, \quad \omega_4 = 199,56, \quad \omega_5 = 298,27, \quad \omega_6 = 416,71, \quad \omega_7 = 712,81, \\ \omega_8 = 890,46, \quad \omega_9 = 1087,86, \quad \omega_{10} = 1304,99, \quad \omega_{11} = 1541,86, \quad \omega_{12} = 1798,47, \quad \omega_{13} = 2074,82, \\ \omega_{14} = 2370,91.$$

Шектік шарттарын анықтайық. Maple программалық пакетінің көмегімен (3.22) жүйесінің рангі 14 ға тең, ал оның шешімі:

$$M_{1357} = K, \quad M_{3457} = K, \quad M_{1378} = -2K, \\ M_{3478} = -2K, \quad M_{3457} - M_{1356} = 0.$$

қалған M_{ijkl} нөлге тең. $M_{1357} \neq 0$ теңдігінен $a_1 \neq 0, a_3 \neq 0, b_1 \neq 0, b_3 \neq 0$ аламыз. Бұдан шектік шарттарын жалғыз түрін аламыз:

$$W(0) - W'''(0) = 0, \quad W''(0) = 0, \\ W(1) + 2W'''(1) = 0, \quad W''(1) = 0,$$

Бұл бөлімде құбыр шекарасының бекітілуін бір мәнді анықтау үшін тоғыз меншікті жиілік керек екеніне көз жеткіздік. Егер сол жиіліктер белгілі болса, шекаралық бекітілуін анықтау алгоритімін ұсындық.

3.5 Меншікті жиіліктердің минимал мөлшерін қолдана отырып құбырдың бекітілуін идентификациялау

Сұйықтығы бар құбырдың тербелісі қарастырылады. Бұрынырақ сұйықтық құбыр бойымен ақпайтын болса, онда құбырдың иілу тербелісінің барлық меншікті жиіліктері бойынша құбырдың бекітілуі оның ұштарындағы орын ауыстыру дәлдігіне дейін бірімәнді анықталатыны көрсетілді. бқШеттік шарттар идентификациясы есебі де тоғыз меншікті жиіліктер бойынша шешілген. Бұл жұмыста құбырдың шеттік шарттарын оның ұштарындағы орын ауыстыру дәлдігіне дейін бірімәнді қалпына келтірудегі меншікті мәндер, беске дейін қысқартылған. Бұрындары 9-тендеуден тұратын сызықты жүйені шешу арқылы спектральді мәліметтер азайтылатын болса, бұл жұмыста канондық түрге келтірілген шеттік шарттардағы төрт белгісіз коэффициенттерге қатысты бес сызықты емес тендеулер жүйесі шешіледі. Осы кері есепті шешудегі мысалдар келтірілді. Идентификация үшін меншікті мәндердің кіші саны жеткіліксіз екендігі жайлы контрмысалдар да көрсетілді. Бірінші контрмысалда, құбырдың бекітілуін идентификациялау үшін төрт нөлдік емес меншікті жиіліктердің өзі де жеткіліксіз болатыны көрсетілді. Екінші контрмысалда, жеке дара жағдайда нөл меншікті мән бола ала ма деген мәселе туралы айтылды.

Сұйықтығы бар құбырлардың тербелісін, құбырлар мен сырықтар тербелісінің меншікті жиіліктерін анықтауда [1]-[8] жұмыстары арналған. [9]-[16] жұмыстарында шеттік шарттардың параметрлерін анықтау және сырықтардың, құбырлардың және басқада механикалық таратылған жүйелердің түйіндесу шарттары есебі шешілді. Жалпы соның ішінде, [15] екі меншікті мән арқылы құбырдың серпімді емес бекітілуі, [16] жұмысында он төрт меншікті жиіліктер арқылы сұйықтығы бар құбырдың бекітілуі анықталынды. [13,14] барлық меншік жиіліктер (соның ішінде нөлдік меншікті мән) арқылы құбырдың бекітілуі (сұйықтық ақпаған жағдайда) оның ұштарындағы орын ауыстыру дәлдігіне дейін бірімәнді анықталатыны көрсетілді. Сондай-ақ, сол жерде бұндай идентификацияға тоғыз меншікті жиіліктердің жеткілікті екендігі көрсетілді. [15] жұмыста құбырдың 16 серпімді емес бекітілуінің біреуін ((заделка)-(заделка), (заделка)-(еркін тіреу), (заделка)-(плавающая заделка), (заделка)-(еркін ұшы), (еркін тіреу)-(заделка), (еркін тіреу)-(еркін тіреу), (еркін тіреу)-(плавающая заделка), (еркін тіреу)-(еркін ұшы), (плавающая заделка)-(заделка), (плавающая заделка)-(свободное опирание), (плавающая заделка)-(плавающая заделка), (плавающая заделка)-(еркін ұшы), (еркін ұшы)-(заделка), (еркін ұшы)-(еркін тіреу), (еркін ұшы)-(плавающая заделка),(еркін ұшы)-(еркін ұшы)) оның ұштарындағы орын ауыстыру дәлдігіне дейін анықтауда нөлдік мәні меншікті бола ала ма деген мәлімет жеткілікті болады. Бұл жұмыста құбырдың бекітілуінің идентификациясы үшін бес меншікті жиіліктің жеткілікті, ал төрт меншікті мән жеткіліксіз екендігі көрсетілді.

Тура есеп

Сұйықтығы бар құбырдың (сұйықтық қозғалмайды) иілу тербелістерінің меншікті жиіліктерін оның ұштарындағы бекітілу түрін (шеттік шарттарын) және механикалық жүйенің физикалық параметрлерін (құбырды бекітетін пружинаның қатаңдық коэффициенті; құбырдың массасы, тығыздығы ұзындығы, ішкі және сыртқы радиустары; құбырдың қарастырылып отырған бөлігінің ішкі көлемін толық қамтитын сұйықтықтың массасы мен тығыздығы).

Ағынды сұйықтығы бар құбырдың еркін аз тербелісінің теңдеуі келесі түрде

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m + M) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U \left(\frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.7)$$

мұнда

$$J = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4), \quad m = \pi (r^2 - r_1^2) \rho, \quad M = \pi r_1^2 \rho_0, \quad p_0 = E \left(\frac{\pi r_1}{2L} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{r}{r_1} \right)^4 - 1 \right)$$

бұл жерде J – құбырлық қиманың инерция моменті, EJ – құбырдың қатаңдығы, p_0 – ішкі критикалық қысым, m және M – құбыр ұзындығының бірлігіне келетін құбыр мен сұйықтық массасы, r және r_1 – көлденең қиманың ішкі және сыртқы қимасы, U – сұйықтықтың қозғалу жылдамдығы, ρ – құбыр материалының тығыздығы, ρ_0 – сұйықтық тығыздығы, L – құбыр ұзындығы.

$x = X/L$, $\omega = W/L$, белгілеулерін енгізіп, (3.7) теңдеуді келесі түрде жазамыз:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{(m + M)L^4}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2MUL^3}{EJ} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{ML^2}{EJ} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

$\omega(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$ кою арқылы, мына теңдеуге келеміз

$$W^{(4)} + aW'' + 2bi\omega W' - c\omega^2 W = 0 \quad (3.8)$$

$$\text{Мұнда } a = \frac{ML^2}{EJ} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + U^2 \right), \quad b = \frac{2MUL^3}{EJ}, \quad c = \frac{(m + M)L^4}{EJ}$$

x және ω белгілеулерін енгізу арқылы мына айнымалыларды өлшемсіз етуге

$$a: \frac{\kappa_2}{m} \cdot \frac{m^2}{1} \cdot \frac{m \cdot c^2}{\kappa_2} \cdot \frac{1}{m^4} \cdot \frac{m^2}{c^2} = 1, \quad \omega \cdot b: \frac{1}{c} \left(\frac{\kappa_2}{m} \cdot \frac{m}{c} \cdot \frac{m^3}{1} \cdot \frac{m \cdot c^2}{\kappa_2} \cdot \frac{1}{m^4} \right) = 1,$$

$$\omega^2 \cdot b: \frac{1}{c^2} \left(\frac{\kappa_2}{m} \cdot \frac{m^4}{1} \cdot \frac{m \cdot c^2}{\kappa_2} \cdot \frac{1}{m^4} \right) = 1$$

Сұйықтық құбыр бойымен ақпаған жағдайды қарастырып жатқандықтан, (2) теңдеу қысқартылып келесі түрде:

$$W^{(4)} + aW'' - cw^2W = 0 \quad (3.9)$$

Жалпы түрдегі шеттік шарттар (Штурм типіндегі шарттар [17, с. 70]):

$$\begin{aligned} U_1(W) = -a_1W(0) + a_4W''' = 0, \quad U_3(W) = -b_1W(1) + b_4W'''(1) = 0 \\ U_2(W) = -a_1W'(0) + a_3W''(0) = 0, \quad U_4(W) = b_2W'(1) + b_3W''(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

мұнда $|a_1| + |a_4| \neq 0$, $|a_2| + |a_3| \neq 0$, $|b_1| + |b_4| \neq 0$, $|b_2| + |b_3| \neq 0$

$U_1(W_k)$ және $U_2(W_k)$ формаларының a_j коэффициенттерінен құралған матрицаны A әрпімен, ал $U_3(W_k)$ және $U_4(W_k)$ формаларының b_j коэффициенттерінен құралған матрицаны B әрпімен белгілейміз.

$$A = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Біздің қарастырылып отырған мысалымызда спектр қарапайым төрт меншікті мәннен тұратынын байқаймыз. Алғашқы меншікті мәндер үшін $\lambda = \lambda_k$ кезінде $\frac{\partial \Delta(\lambda)}{\lambda} \neq 0$ теңсіздігі арқылы тексерілген, ал келесі меншікті жиіліктер үшін 2 теоремадан [17, с. 74-75], яғни Штурм – Лиувилл шарты бар шеттік есебінің спектрі қандай да бір мәннен бастап қарапайым меншікті мәндерден тұрады.

Тура есептің шешімін (заделка)-(еркін ұшы) жағдайындағы мысалда көрсетейік, шеттік шарттардағы коэффициенттері $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $b_4 = 1$:

$$\begin{aligned} U_1(W) = W(0) = 0, \quad U_3(W) = W'''(1) = 0 \\ U_2(W) = W'(0) = 0, \quad U_4(W) = W''(1) = 0 \end{aligned}$$

a және c коэффициенттерін 1ге тең деп алып, бұл есеп үшін характеристикалық теңдеу сұйықтық құбыр бойымен ақпаған жағдайда ($U = 0$) келесі түрде:

$$W^{(4)} + W'' - w^2W = 0 \quad (3.12)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ және λ_4 – (3.12) теңдеудің түбірлері:

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4w^2}}{2}}, \quad \lambda_2 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 + 4w^2}}{2}} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
W_1(x) &= -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_2 x} - \frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_2 x}, \\
W_2(x) &= -\frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_1 x} + \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_2 x} + \frac{\lambda_2^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1^2}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_2 x}, \\
W_3(x) &= \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} e^{-\lambda_2 x}, \\
W_4(x) &= \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1} e^{\lambda_1 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_2} e^{\lambda_2 x} - \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_1} e^{-\lambda_1 x} + \frac{1}{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\lambda_2} e^{-\lambda_2 x}
\end{aligned}$$

Функциялары мына шартты қанағаттандыратын (3.12) теңдеудің сызықты тәуелсіз шешімдері

$$W_j^{(r-1)}(0) = \begin{cases} 0, & j \neq r \\ 1, & j = r \end{cases} \quad j, r = 1.2.3.4$$

(6) теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде беріледі

$$W(x) = C_1 W_1(x) + C_2 W_2(x) + C_3 W_3(x) + C_4 W_4(x)$$

Жиіліктер теңдеуін характеристикалық анықтауышты нөлге теңестіру шартынан алады

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} U_1(W_1) & U_1(W_2) & U_1(W_3) & U_1(W_4) \\ U_2(W_1) & U_2(W_2) & U_2(W_3) & U_2(W_4) \\ U_3(W_1) & U_3(W_2) & U_3(W_3) & U_3(W_4) \\ U_4(W_1) & U_4(W_2) & U_4(W_3) & U_4(W_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ U_3(W_1) & U_3(W_2) & U_3(W_3) & U_3(W_4) \\ U_4(W_1) & U_4(W_2) & U_4(W_3) & U_4(W_4) \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

Компьютердегі есептеулер келесі нәтижелерді берді: $\omega_1 = 3.641309$, $\omega_2 = 21.72958$, $\omega_3 = 61.32403$, $\omega_4 = 120.4921$, $\omega_5 = 199.4298$, $\omega_6 = 298.1131$, $\omega_7 = 416.5395$, $\omega_8 = 554.7075$, $\omega_9 = 712.6162$.

Сұйықтық құбыр бойымен ақпаған жағдайда меншікті жиіліктерде комплекс бөлігі (жорамал) болмайтынын байқаймыз.

Кері есеп

ω_k меншікті жиіліктері белгілі. A және B (3.11) матрицаларының рангтері екіге тең. a_j және b_j шеттік шарттар коэффициенттерін қалпына келтіру қажет, яғни бекітілудің түрін анықтау керек.

Бұрынырақ [13,14] жұмыстарында шеттік шарттар орын ауыстыру дәлдігіне дейін бірмәнді анықталатыны және ол үшін тоғыз меншікті жиілік қолданылды. Бұл жұмыста сұйықтығы қозғалмайтын құбырдың бекітілуін бес меншікті жиілік арқылы бірмәнді анықтауға болатынын көрсетеміз.

A , B және екі нөлдік матрицалардан құралған матрицаны C арқылы белгілейміз:

$$C = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

C матрицасының элементтерін c_{ij} арқылы, ал k_1, k_2, k_3, k_4 нөмердегі

бағандардан құралған минорларды $M_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \begin{vmatrix} c_{1k_1} & c_{1k_2} & c_{1k_3} & c_{1k_4} \\ c_{2k_1} & c_{2k_2} & c_{2k_3} & c_{2k_4} \\ c_{3k_1} & c_{3k_2} & c_{3k_3} & c_{3k_4} \\ c_{4k_1} & c_{4k_2} & c_{4k_3} & c_{4k_4} \end{vmatrix}$, мысалы

$$M_{1256} = (-a_1) \cdot (-a_2) \cdot b_1 \cdot b_2.$$

(3.10) шеттік шарттар идентификациясы есебі жолдарының сызықты түрлену дәлдігіне дейінгі C матрицасының идентификация есебіне келтіріледі.

(3.14) характеристикалық анықтаушысын басқа түрде:

$$\Delta(\omega) = \det(C \cdot D), \text{ мұндағы}$$

$$D = \begin{vmatrix} W_1(0) & W_2(0) & W_3(0) & W_4(0) \\ W_1'(0) & W_2'(0) & W_3'(0) & W_4'(0) \\ W_1''(0) & W_2''(0) & W_3''(0) & W_4''(0) \\ W_1'''(0) & W_2'''(0) & W_3'''(0) & W_4'''(0) \\ W_1(1) & W_2(1) & W_3(1) & W_4(1) \\ W_1'(1) & W_2'(1) & W_3'(1) & W_4'(1) \\ W_1''(1) & W_2''(1) & W_3''(1) & W_4''(1) \\ W_1'''(1) & W_2'''(1) & W_3'''(1) & W_4'''(1) \end{vmatrix}$$

ω_k меншікті жиіліктері белгілі болғандықтан, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ және λ_3 мәндерін таба аламыз, бұл дегеніміз $w_1(x)$, $w_2(x)$, $W_3(x)$, $w_4(x)$ функциялары және олардың барлық туындыларын есептеуге мүмкіндік береді. Сондықтан D матрицасы бізге белгілі.

Бине-Коши формуласын қолдана отырып, алатынымыз

$$\Delta(\omega_k) = \sum_{\substack{1 \leq k_1 < k_2 \leq 4 \\ 5 \leq k_3 < k_4 \leq 8}} M_{k_1 k_2 k_3 k_4} f_{k_1 k_2 k_3 k_4} = 0 \quad (3.15)$$

мұндағы $f_{k_1 k_2 k_3 k_4} - k_1, k_2, k_3, k_4$ нөмердегі бағандардан құралған D матрицасының төртінші ретті минорлары. (3.9) теңдеу келесі түрде ашылып жазылады

$$\Delta(\omega_k) = x_1 f_{1257}(\omega_k) + x_2 f_{1268}(\omega_k) + x_3 f_{1368}(\omega_k) + x_4 f_{1278}(\omega_k) + x_5 f_{1378}(\omega_k) + x_6 f_{2478}(\omega_k) + x_7 f_{1357}(\omega_k) + x_8 f_{2468}(\omega_k) + x_9 f_{1256}(\omega_k) + x_{10} f_{3478}(\omega_k) = 0 \quad (3.16)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} x_1 &= M_{1257} - M_{1356} (f_{1257} = -f_{1356}), & x_5 &= M_{1378} - M_{3457} (f_{1378} = -f_{3457}), \\ x_2 &= M_{1268} - M_{2456} (f_{1268} = -f_{2456}), & x_6 &= M_{2478} - M_{3468} (f_{2478} = -f_{3468}), \\ x_3 &= M_{1368} - M_{2457} (f_{1368} = f_{2457}), & x_4 &= M_{1278} - M_{3456} (f_{1278} = f_{3456}), \\ x_7 &= M_{1357}, & x_8 &= M_{2468}, & x_9 &= M_{1256}, & x_{10} &= M_{3478} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$cw^2 f_{1356} = -f_{1378}, \quad cw^2 f_{2456} = -f_{2478}, \quad cw^2 f_{1357} = -f_{2468}, \quad cw^4 f_{1256} = f_{3478}. \quad (3.18)$$

(3.18) формуладан ұштарындағы орын ауыстырудың бірінде бекітілу болмаған жағдайға меншікті жиіліктер сәйкес келеді. Бұндағы c (3.8) дегі коэффициенті. Бұл неге маңызды екенін төменде көрсетеміз.

(3.16) теңдеуге бес меншікті жиіліктерін w_1, \dots, w_5 қойып, белгісіз x_1, \dots, x_{10} қатысты бес теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің матрицасы келесідей болады:

$$\begin{pmatrix} f_{1257}(w_1) & f_{1268}(w_1) & \dots & f_{1256}(w_1) & f_{3478}(w_1) \\ f_{1257}(w_2) & f_{1268}(w_2) & \dots & f_{1256}(w_2) & f_{3478}(w_2) \\ f_{1257}(w_3) & f_{1268}(w_3) & \dots & f_{1256}(w_3) & f_{3478}(w_3) \\ f_{1257}(w_4) & f_{1268}(w_4) & \dots & f_{1256}(w_4) & f_{3478}(w_4) \\ f_{1257}(w_5) & f_{1268}(w_5) & \dots & f_{1256}(w_5) & f_{3478}(w_5) \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

x_1, \dots, x_{10} айнымалаларын a_1, \dots, a_4 және b_1, \dots, b_4 арқылы өрнектейміз.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 + a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_2; & x_2 &= -a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_4 - a_2 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_2; \\ x_3 &= a_1 \cdot a_3 \cdot b_2 \cdot b_4 + a_2 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_3; & x_4 &= -a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 \cdot b_4 - a_3 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_2; \\ x_5 &= a_1 \cdot a_3 \cdot b_3 \cdot b_4 + a_3 \cdot a_4 \cdot b_1 \cdot b_3; & x_6 &= -a_2 \cdot a_4 \cdot b_3 \cdot b_4 - a_3 \cdot a_4 \cdot b_2 \cdot b_4; \\ x_7 &= -a_1 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_3; & x_8 &= -a_2 \cdot a_4 \cdot b_2 \cdot b_4; & x_9 &= a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2; & x_{10} &= a_3 \cdot a_4 \cdot b_3 \cdot b_4 \end{aligned}$$

Нәтижесінде сегіз белгісізден тұратын бес теңдеулер жүйесін аламыз.

Бұл жүйе C матрицасын канондық түрге келтіру арқылы шеттік шарттарындағы төрт белгісізден тұратын сызықты емес бес теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Құбырдың бекітілуінің идентификациясы үшін төрт меншікті жиіліктер жеткіліксіз. Сәйкес контрмысал төменде көрсетіледі.

Бұрындары құбырдың бекітілуінің идентификациясы есебі 10 белгісізі бар $x_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 9 сызықты теңдеулерден тұратын (3.16) жүйе арқылы шешілген. Сондықтан бес емес, тоғыз меншікті жиілік қолданылды.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссертациялық жұмыс екі бөлімнен тұрады. Бір бөлімінде теориялық мәселелер қарастырылды. Екінші бөлімінде кейбір практикалық маңызды есептер талқыланды.

Алдымен теориялық бөлігіне тоқтайық. Бірнеше сырықтардан қосылған конструкцияларға икемделген математикалық модельдер ұсынылды. Әр сырық үш өлшемді дене, бірақ математикалық модельдеу кезінде оларды бір өлшемді нысандар ретінде қарастырылған жөн. Бұл идеяны басында Тимошенко ұсынған. Бірақ Тимошенконың моделінің қолдану аясы шектеулі. Тимошенко моделі заманауи практикада кездесетін конструкцияларды инженерлер пікірі бойынша толық қанағат етпейді. Сондықтан бұл диссертациялық жұмыста жаңартылған математикалық моделдер қарастырылады және олардың тиімділығы көрсетіледі. Диссертацияда ұсынылған модельдер графтардағы дифференциалдық теңдеулер жүйелері арқылы сипаталады. Аталған жүйелердің бірнеше ерекшеліктері бар. Жүйеге кіретін дифференциалдық теңдеулердің реттері әртүрлі. Бұл жағыдай көп математикалық қиындықтарды туындатады. Аталған мәселелер диссертацияның бірінші бөлігінде мұхият зерттелген. Бірнеше сырық бір түйіндіде қосылады. Бұл кезде қандай математикалық шарттар түйінде орындалатындығы табылған. Назар аударатын жаңалық: бұрын мән бермеген бірақ маңызды түйіндегі шарттар ұсынылған. Бұл шарттарға сәйкес шекаралық есептерді осыған дейін толық зерттелмегендіктен жаңадан талқылауға тура келді.

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлігінде келесі практикадағы мазмұнды есептер зерттелген:

- көпірдің бүйір бетіне соғатын желдің критикалық жылдамдығына әсер ететін шамалар анықталды.
- Қисайған құбырдың ішкі қысымы табылды және меншікті жиіліктерін табу алгоритімі ұсынылды.
- Құбырдың шеттерінің бекітілулері 5 жиілікпен бір мәнді анықталатындығы көрсетілді.
- Жіңішке серпімді сырықтар үшін шектік теңдеулер жүйелері ұсынылды.
- Түйінге байланған бірнеше жіңішке қисайған сырықтар үшін шектік теңдеулер жүйесі қортылып шығарылды.
- Графтардағы дифференциалдық теңдеулердің меншікті жиіліктері нақты болатындай шекаралық шарттар ұсынылды.
- Жиіліктер бойынша шектік сырықтардың шекаралық бекітілулерін табу алгоритімі ұсынылды.

Қолданылған әдебиеттер

- [1] Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: 1975
- [2] Sokolnikoff I. S. Mathematical theory of elasticity. McGraw-Hill, New York, 1956. P 239
- [3] Галактионов Е. В., Тропп Э. А. Асимптотический метод расчета термоупругих напряжений в тонком стержне // Известия АН СССР. Сер. Физ. 1976, Т. 40, N 7, с. 1399-1406
- [4] Елисеев В. В., Орлов С. Г. Асимптотическое расщемление в пространственной задаче линейной упругости для удлиненных тел со
- [5] Назаров С. А. Обоснование асимптотической теорий тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Пробл. матем. анализа. СПб: Издательство СПбГУ. 1997. вып 17 с. 101-152.
- [6] Sanchoz-Hubert J., Sanchoz-Palencia E. Couplage flexion- torsion-traction dans les poutres anisotropes a section hetoregene// C.R. Acad. Sci. Paris. Ser 2. 1991. Т. 312. p 337-344.
- [7] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна// Успехи матем.наук. 1988. Т. 43, N 5. с.55-98
- [8] Назаров С. А. Неравенство Коррна асимптотически точные для тонких областей// Вестник СПбГУ. Сер.матем.,мех.,астр.1992.N 8. С.19-24
- [9] Kondratiev V.A., Oleinik O.A. Hardy's and Korn's type inequalities and their applications//Rendiconti di Matematica. Ser.VII. 1990. V. 10. P. 641
- [10] Ляв А. Математическая теория упругости М.-Л: главная редакция обще технической литературы и номографи1935.
- [11] В.А. Светлицкий, «Механика стержней» // Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1987.
- [12] С.Г. Лехницкий, «Кручение анизотропных и неоднородных стержней» // М.:Наука, 1971.
- [13]. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержне. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга. 2002.
- [14] Назаров С.А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких. Алгебра и анализ. 1995, том 7, выпуск 5, 1-92.
- [15] В. Kanguzhin, L. Zhapsarbaeva, Zh. Madibaiuly, «Lagrange formula for differential operators self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree», *Eurasian Math. J.*, 10:1 (2019), pp. 16-29.
- [16] L.K. Zhapsarbaeva, В.Е. Kanguzhin, M.N. Konyrkulzhayeva, «Self-adjoint restrictions of maximal operator on graph», *Ufa. Math. J.*, 9:4 (2017), pp. 35-43.
- [17] P. Kuchment, «Graph models of wave propagation in this structures» // *Waves in Random Media*, Vol. 12 (2002), pp 1-24.
- [18] P. Kuchment, H. Zeng, «Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph» // *J. Math. Anal. Appl.* 258 (2001), pp. 671-700.

- [19] P. Exner, O. Post, «Convergence of spectra of graph – like thin manifolds» // J. Geom. Phys. 54 (2005), pp. 77-115.
- [20] O. Post, «Spectral Analysis on Graph-like Spaces» // Lecture Notes in Mathematics 2039 /vol. 2039.
- [21] С.А. Назаров, «Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких» // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, №5. с. 1-92.
- [22] С.А. Назаров, А.С. Слуцкий, «Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование» // Известия РАН. сер. матем. 2000. Т. 64, №3, с. 97-131.
- [23] S. Molchanov, B Vainberg, «Scattering solutions in networks of thin fibers: Small diameter asymptotics» // Comm. Math. Phys. 273, No. 2 (2007), pp. 533-559.
- [24] F. Harary, *Graph theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [25] В.Е.Кангузин, А.А.Аниязов, *Well-posed problems for the Laplace operators in a punctured disk*. Math.Notes. 89 (2011), no. 6., 819–829.
- [26] В.Е.Кангузин, N.E. Tokmagambetov, *Resolvents of well-posed problems for finite-rank perturbations of the polyharmonic operator in a punctured domain*. Siberian Math.Zh. 57 (2016), нет. 2., 265–273.
- [27] В.К. Кокебаев, М. Отелбаев, А.Н. Шыныбеков, *To questions of expansion and restrictions of operators*. , Dokl. Akad. Nauk, 271 (1983), no. 6., 1307–1311. (in Russian)
- [28] М.А. Нaimark, *Linear differential operators*. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2009.
- [29] М. Отелбаев, А.Н. Шыныбеков, *On well-posed problems Bitsadze-Samarskyi type*. Dokl. Akad. Nauk, 265 (1982), no. 4., 815–819 (in Russian).
- [30] C.R Paul, *Fundamentals of Electric Circuit Analysis*. John Wiley and Sons. 2001.
- [31] Yu.V. Pokornyi, et al, *Differential equations on geometrical graphs*. Fizmatlit, Moscow, 2005. (in Russian)
- [32] O. Post, *Spectral Analysis on Graph-Like Spaces*. Springer Science and Business Media. 2039. (2012).
- [33] S. Tsoi , S.M. Tskhai, *Applied graph theory*. Nauka, Alma-ata, 1971 (in Russian).
- [34] V.A. Yurko, *On recovering Sturm-Liouville operators on graphs*. Math. Notes. 79 (2005), no. 3-4., 572-582.
- [35] J. von Below, D. Mugnolo, *The spectrum of the Hilbert space valued second derivative with general self- adjoint boundary conditions*. Linear Algebra and its Applications. 439 (2013), 1792–1814.
- [36] M.G. Zavgorodnij, *Adjoint and self-adjoint boundary value problems on a geometric graph*. Differential Eqations, Pleades Publishing. 50 (2014), no. 4., 446–456.
- [37] L.K. Zhapsarbayeva, В.Е. Кангузин, М.Н. Кonyrkulzhayeva *Self-adjoint restrictions of maximal operator on graph*. Ufimsk. Mat. Zh. 9 (2017), no. 4., 36–44.

[38] L.K. Zhapsarbayeva, B.E. Kanguzhin, N. Koshkarbayev. On asymptotics by spectral parameter of the solutions of differential equations on a tree. *Mat. Zhur.* 17 (2017), no. 4., 37–49.

[39] Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. — М.: Физматлит, 2009.

[40] А. М. Ахтямов, Аюпова А. Р. Идентификация точечной массы на стержне.

[41] Inverse boundary problems for intermediate springs on a rod with geometrical symmetry Daulet B. Nurakhmetov, Serik A. Jumabayev *Electron. J. Differential Equations* 2017 (33), 1-10

[42] А. М. Ахтямов, А. В. Муфтахов, А. А. Ахтямова, “Об определении закрепления и нагруженности одного из концов стержня по собственным частотам его колебаний”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, 2013, № 3, 114–129

[43] Мадибайулы Ж. Об одной задаче восстановления сосредоточенных масс по частотам изгибных колебаний стержня. Конференция «XIV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых ЛОМОНОСОВ – 2018», 20.05.2018-21.05.2018

[44] Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука. 1969. 182 с.

[45] Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. Мир, 1985. — 254 с

[46] Ахтямов А. М., Шагиев В. Р. Идентификация неупругих видов закреплений трубопроводов // *Вестник Башкирского университета*. 2016. Т. 21. № 1. С. 21-26

[47] Ахтямов А. М., Шагиев В. Р. Идентификация закрепления трубопровода с использованием минимального количества собственных частот // *Математические структуры и моделирование*. 2018. № 1 (45). С. 95–107

[48] Кангужин Б. Е. Мадибайулы Ж. Идентификация закрепления криволинейного трубопровода протекающей по нему жидкостью. XVII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2018», Казань, РФ, 23.11.2018-28.11.2018

[49] Мадибайулы Ж. Восстановление площадей сечений продольно колеблющегося стержня по его частотам. Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Дня работников науки республики Казахстан (06.04.2018-10.04.2018)

[50] Мадибайулы Ж. Устойчивость трубы с протекающей по ней жидкостью «Международная конференция, Математика, Механика, Прикладные вопросы» Караганда, 12.06.2019-13.06.2019

[51] Parkinson, G. V., and Brooks, N. P. H. “On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders”, 1961, *ASME J. Appl. Mech.*, 28, pp. 252–258.

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.

2. Дезин А. А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач/ *Тр. МИАН*. — М.: Наука, 2000. — 229. — С. 3–175.

3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием// Диффер. уравн. — 1977. — 13, No 2. — С. 294–304.
4. Кангужин Б. Е., Гани С. Н. Свертки, порождаемые дифференциальными операторами на отрезке// Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2004. — No 1. — С. 29–33.
5. Кангужин Б. Е., Ружанский М. Е., Токмагамбетов Н. Е. О свертках в гильбертовых пространствах. — Функц. анализ и его прил. Т.51. No 1. 2017. С. 77–80.
6. Кангужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е. Свертка, преобразование Фурье и пространства Соболева, порождаемые нелокальной задачей Ионкина// Уфим. мат. ж. — 2015. — 7, No 4. — С. 80–92.
7. Кокебаев Б. К., Отелбаев М., Шыныбеков А. Н. К вопросам расширений и сужений операторов// Докл. АН СССР. — 1983. — 271, No 6. — С. 1307–1313.
8. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
9. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 1982. — No 6. — С. 12–21.
10. Bozhinov N. Convolutional representations of commutants and multipliers. — Sofia: Bulg. Acad. Sci., 1988.
11. Delgado J., Ruzhansky M., Tokmagambetov N. Schatten classes, nuclearity and nonharmonic analysis on compact manifolds with boundary// J. Math. Pures Appl. — 2017. — 107. — С. 758–783.
12. Kanguzhin B., Tokmagambetov N. The Fourier transform and convolutions generated by a differential operator with boundary condition on a segment// в кн.: Fourier Analysis: Trends in Mathematics.— Springer-Verlag, 2014. — С. 235–251,.
13. Riesz F., Sz.-Nagy B. Functional analysis. — Dover, 1990.
14. Ruzhansky M., Tokmagambetov N. Nonharmonic analysis of boundary-value problems// Int. Math. Res. Notes. — 2016. — 12. — С. 3548–3615.
15. Ruzhansky M., Tokmagambetov N. Very weak solutions of wave equation for Landau Hamiltonian with irregular electromagnetic field// Lett. Math. Phys. — 2-17. — 107. — С. 591–618.
16. Saitoh S., Sawano Y. Theory of reproducing kernels and applications. — Springer, 2016.
17. Әдебиеттер тізімі

18. 1 И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, “Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:4 (1951), 309–360
19. 2 Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, “Определение дифференциального уравнения по двум спектрам”, *УМН*, **19**:2(116) (1964), 3–63
20. 3 З. Л. Лейбензон, “Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков”, *Тр. ММО*, **15** (1966), 70–144
21. 4 В. А. Юрко, “Восстановление дифференциальных операторов высших порядков”, *Дифференц. уравнения*, **25**:9 (1989), 1540–1550
22. 5 В. А. Садовничий, “Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями. Регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя”, *Докл. АН СССР*, **206**:2 (1972), 293–296
23. 6 Кангужин Б.Е, Даирбаева Г., Мадибайулы Ж. «Идентификация граничных условий дифференциального оператора», *Вестник КазНУ, серия математика*, 2019, № 3 (103), с. 13-18